

**PROTOKOLL ZUM ANFÄNGERPRAKTIKUM
PHYSIK**

**Signalübertragung auf LC-Ketten
und Koaxialkabeln**

-Teil 1-

Sebastian Finkel
Sebastian Wilken

Versuchsdurchführung:
14. Juni 2006

0. Inhalt

1. Einleitung

2. Theoretischer Teil

- 2.1. Differentialgleichung der *LC*-Kette
- 2.2. Signallaufzeit und Dispersionsrelation
- 2.3. Abbruchfrequenz
- 2.4. Eindringtiefe
- 2.5. Wellenwiderstand der *LC*-Kette
- 2.6. Signalreflexionen auf einer *LC*-Kette

3. Praktischer Teil

- 3.1. Signalverzerrung durch *LC*-Glieder
- 3.2. Verzögerungszeit eines *LC*-Kettengliedes
- 3.3. Bestimmung des Reflexionskoeffizienten
- 3.4. Bestimmung der Abbruchfrequenz und der frequenzabhängigen Phasenverschiebung (Dispersion)
- 3.5. Messung der Eindringtiefe als Funktion der Frequenz

4. Anhang

- 4.1. Literatur
- 4.2. Abbildungsnachweis

5. Anlage (Messwertabellen)

1. Einleitung

In dem Doppel-Versuch „Signalübertragung auf LC-Ketten und Koaxialkabel“ wollen wir uns mit den Eigenschaften von in der experimentellen Physik, aber auch im Alltag eingesetzten Kabeln zur Signalübertragung auseinandersetzen. Als Modell für ein solches Koaxialkabel werden wir uns zunächst mit den so genannten *LC*-Ketten beschäftigen.

2. Theoretischer Teil

Jede Kabelverbindung zwischen zwei Geräten A und B kann man sich mit Hilfe eines Ersatzschaltbildes mit in Reihe liegenden ohmschen Widerständen R und Spulen L sowie parallel liegenden Leitwerten G und Kondensatoren C vorstellen. Der Widerstand R führt nur zu einer Dämpfung des Signals, die man mit einem Verstärker wieder ausgleichen kann, ohne dass Signalteile verzerrt werden oder gar verloren gehen. Ähnlich verhält es sich mit den Leitwerten G . Deswegen beschränken wir uns darauf, nur das Verhalten der so genannten *LC*-Glieder zu betrachten (siehe Abbildung 1).

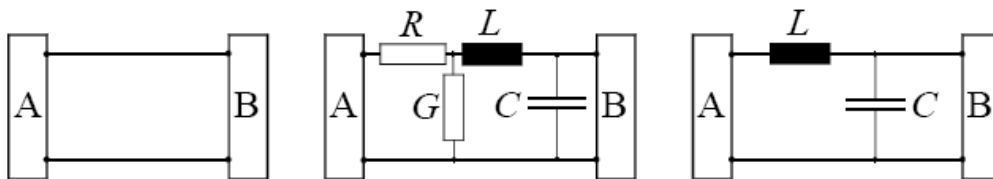


Abb. 1: Ersatzschaltbilder für eine Kabel-Verbindung zwischen A und B.

Im ersten Teil dieses Doppelversuches befassen wir uns also mit den Signalübertragungseigenschaften von diskreten *LC*-Gliedern in periodischer Anordnung, den so genannten *LC*-Ketten.

2.1. Differentialgleichung der *LC*-Kette

Abbildung 2 zeigt eine *LC*-Kette, bei der wir das n -te Glied und seine beiden Nachbarn, das Glied $n + 1$ (rechts davon) und das Glied $n - 1$ (links davon) näher betrachten wollen. Die Ladungen der entsprechenden Kondensatoren sind gegeben durch Q_{n-1} , Q_n und Q_{n+1} . An ihnen fallen die Spannungen U_{n-1} , U_n und U_{n+1} ab.

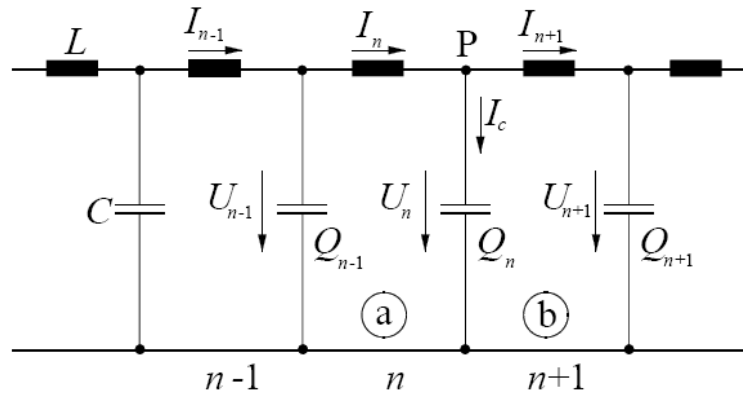


Abb. 2: Ausschnitt aus einer LC-Kette.

Nach der Maschenregel ergibt sich dann für die Spannungsabfälle:

$$(1) \quad \text{Masche a)} \quad U_{n-1} - L \frac{dI_n}{dt} - U_n = 0$$

$$(2) \quad \text{Masche b)} \quad U_n - L \frac{dI_{n+1}}{dt} - U_{n+1} = 0$$

Wir wollen nun aus diesen Gleichungen die Ströme eliminieren, um einen Ausdruck zu finden, der den Spannungsverlauf an den LC-Ketten wiedergibt. Wir überlegen uns aber zunächst mit Hilfe der Knotenregel, dass am Punkt P gilt:

$$(3) \quad I_n = I_{n+1} + I_C = I_{n+1} + \frac{dQ_n}{dt} = I_{n+1} + C \frac{dU_n}{dt}$$

Wir leiten diesen Ausdruck nun nach der Zeit ab, ersetzen dI_{n+1}/dt mit unserem Ergebnis aus Gleichung (2) und setzen das Resultat schließlich in Gleichung (1) ein, so dass wir folgende Differentialgleichung erhalten:

$$(4) \quad \frac{d^2 U_n}{dt^2} = \frac{1}{LC} (U_{n-1} - 2U_n + U_{n+1})$$

2.2. Signallaufzeit und Dispersionsrelation

Wir wollen die Differentialgleichung, die den Spannungsverlauf für die LC -Kette angibt, nun lösen. Dazu wählen wir als Ansatz die Summe zweier harmonischer Wellengleichungen. Unser Ansatz liefert jedoch nur so lange eine Lösung, wie wir die maximale Frequenz der harmonischen Welle nicht überschreiten:

$$(5) \quad U(x, t) = A \sin(k * (x - ct)) + B \sin(k * (x + ct)) \quad \text{mit:} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

A und B sind jeweils Konstanten, λ die Wellenlänge und k die Wellenzahl. Weiterhin gilt für die Beziehung zwischen Wellenlänge λ , Kreisfrequenz ω und Phasengeschwindigkeit c :

$$(6) \quad c = \lambda \frac{\omega}{2\pi}$$

Verwenden wir nun diese Ergebnisse, so erhalten wir eine in $+x$ -Richtung laufende Welle:

$$(7) \quad U_+(x, t) = A \sin\left(\omega * \left(\frac{x}{c} - t\right)\right)$$

Wobei hier x nur diskrete Werte nd annehmen kann (mit d als Abstand zwischen zwei Kettengliedern und n als Nummer des betrachteten Kettenglieds). Uns interessiert nun, welche Zeit ein Signal braucht, um vom Anfang zum n -ten Glied zu gelangen. Bezeichnen wir die Zeit zum durchqueren eines Kettengliedes mit τ , so erhalten wir:

$$(8) \quad U_+(n, t) = A \sin(\omega * (n\tau - t)) \quad \text{mit:} \quad \frac{x}{c} = n\tau$$

Setzen wir dieses Ergebnis in Gleichung (4) ein, so sehen wir, dass Gleichung (8) unter folgender Bedingung eine Lösung ist:

$$(9) \quad \tau = \frac{2}{\omega} \arcsin \frac{\omega \sqrt{LC}}{2}$$

Gleichung (9) stellt die Dispersionsrelation für die Ausbreitung einer harmonischen Welle auf einer LC -Kette dar.

2.3. Abbruchfrequenz

Neben der Dispersion führt ein weiterer Effekt zur Signalverzerrung: Wie wir aus Gleichung (10) erkennen können, gibt es eine maximale Frequenz oder Abbruchfrequenz ω_a , bis zu der noch harmonischen Wellen übertragen werden können:

$$(10) \quad \omega = \frac{2}{\sqrt{LC}} \sin \frac{\omega\tau}{2}$$

$$(11) \quad \Rightarrow \omega_a = \frac{2}{\sqrt{LC}}$$

Signale, die eine höhere Frequenz haben als die Abbruchfrequenz, werden damit nicht mehr übertragen. Setzen wir Gleichung (11) in Gleichung (9) ein, so erhalten wir die Signalverzögerung pro Kettenglied bei der Abbruchfrequenz:

$$(12) \quad \tau_a = \frac{\pi}{2} \sqrt{LC} = \frac{1}{2} T \quad \text{für } \omega = \omega_a \text{ und } T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Demnach ist in diesem Fall τ_a die halbe Periodendauer T . Benachbarte Kettenglieder schwingen somit gerade gegenphasig.

Wir überlegen uns nun noch das Verhalten von LC -Gliedern bei Frequenzen, die weit unter der Abbruchfrequenz liegen. Aus Gleichung (10) erhalten wir mit Hilfe einer Potenzreihenentwicklung für den Sinus, die wir nach dem ersten Glied abbrechen, einen Ausdruck für die Signalaufzeit pro Glied:

$$(13) \quad \tau = \sqrt{LC} = \text{const}$$

Es liegt hier also keine Dispersion mehr vor, da die Laufzeit frequenzunabhängig ist. Signale mit FOURIER-Komponenten in dem Frequenzbereich $\omega \ll \omega_a$ werden also dann fast verzerrungsfrei übertragen.

2.4. Eindringtiefe

Wir wollen uns nun damit beschäftigen, was mit Signalen passiert, die oberhalb der Abbruchfrequenz liegen. Wir haben gesehen, dass wir dann für die Differentialgleichung kein

Ergebnis mehr bekommen. Wir vermuten nun, dass diese Wellen schon nach Durchlaufen weniger LC -Gliedern so stark gedämpft wurden, dass ihre Amplitude nahezu auf Null gesunken ist. Wir überlegen uns daher ein Lösungsansatz für eine gedämpfte harmonische Schwingung:

$$(14) \quad U_+(n, t) = e^{-\beta x} A(n) \sin \omega t$$

mit β als Dämpfungskonstante und A als Amplitude, für die gilt:

$$(15) \quad A(n) = A_0 (-1)^n$$

Gleichung (14) ist dann eine Lösung für Gleichung (4) im Falle $\omega > \omega_a$. Mit $x = nd$ erhält man dann für β :

$$(16) \quad \beta = \frac{2}{d} \ln \left[\frac{\omega}{\omega_a} + \sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_a} \right)^2 - 1} \right]$$

Als Einheit ergibt sich für die Dämpfungskonstante $[\beta] = 1/m$. Ihren Kehrwert bezeichnet man dann als Eindringtiefe:

$$(17) \quad \delta(\omega) = \frac{1}{\beta(\omega)}$$

Die Eindringtiefe gibt an, nach welchem Glied die Amplitude des Eingangssignals auf den $1/e$ -fachen Wert der Anfangsamplitude gefallen ist.

2.5. Wellenwiderstand der LC-Kette

Für den Wellenwiderstand Z_0 einer LC -Kette findet man durch Anwendung der KIRCHHOFFSchen Gesetze:

$$(18) \quad Z_0(\omega) = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{\sqrt{1 - \omega^2 \frac{LC}{4}}}$$

Wir sehen also, dass der Widerstand hier frequenzabhängig ist. Allerdings wirkt sich dies erst bei hohen Frequenzen aus. Für kleine Frequenzen $\omega \ll \omega_d$ kann man daher schreiben:

$$(19) \quad Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \text{const.}$$

2.6. Signalreflexionen auf einer LC-Kette

Für den Reflexionskoeffizienten einer LC-Kette, an deren Ende sich ein Abschlusswiderstand R befindet, gilt:

$$(20) \quad \rho = \frac{R - Z_0}{R + Z_0}$$

Weil jedoch der Abschlusswiderstand R_A bei dem keine Reflexion auftritt frequenzabhängig ist, gilt:

$$(21) \quad R_A(\omega) = Z_0(\omega) = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{\sqrt{1 - \omega^2 \frac{LC}{4}}}$$

Bei einem Signal, welches FOURIERkomponenten mehrerer Frequenzen enthält, ist also eine vollständige Reflexion nicht möglich. Im Falle kleiner Frequenzen wird R_A wieder frequenzunabhängig und es gilt Gleichung (19).

3. Praktischer Teil

In den folgenden Versuchsteilen werden wir folgende LC -Ketten verwenden:

- **Typ (a):** 5 bis 20 Glieder mit je $L = 1$ mH und $C = 1$ nF
- **Typ (b):** 5 Glieder mit je $L = 1$ mH und $C = 100$ nF.

Desweiteren ist noch anzumerken, dass wir bei allen Versuchsteilen das Oszilloskop mit dem jeweiligen Signal des Funktionsgenerators extern triggern.

3.1. Signalverzerrung durch LC -Glieder

Im ersten Versuchsteil wollen wir uns mit der Signalverzerrung durch verschiedene LC -Ketten beschäftigen. Dazu bauen wir eine Schaltung gemäß Abbildung 3 auf. Wir verwenden einen als Differentiator geschalteten Operationsverstärker OP, welchen wir mit einem Widerstand $R_f = 1$ k Ω und einem Kondensator $C_f = 4,7$ nF versehen. Den OP betreiben wir mit Hilfe eines Netzgerätes mit einer Betriebsspannung von 12 V. An den Eingang des OP legen wir das Signal eines Funktionsgenerators FG. Wir stellen am FG eine Rechteckspannung mit einer Frequenz von 1 kHz und einer Amplitude von circa 5 V ein. Zur Signalanpassung schalten wir noch einen Widerstand von 470 Ω in Reihe zwischen FG und C_f .

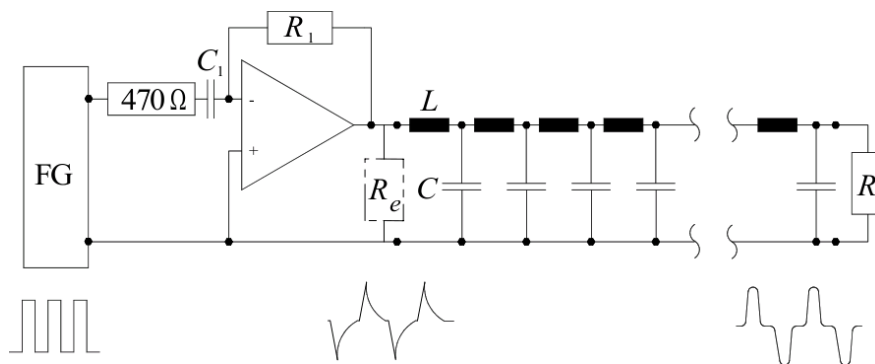


Abb. 3: Versuchsaufbau zur Messung mit LC -Ketten und dem Abschlusswiderstand R .

Wir betrachten nun zunächst das Signal des FG und das Ausgangssignal des OP auf einem Oszilloskop. Wir stellen den Trigger auf die fallende Flanke des Rechtecksignals ein. Wir erkennen im Ausgangssignal des OP dreieckige „Zacken“, welche bei der fallenden Flanke des Rechtecksignals nach oben und bei der steigenden Flanke nach unten zeigen (vgl.

Abbildung 4, Teil (1)). Dies entspricht nicht den mathematischen Erwartungen an die Differentiation eines Rechtecksignals, was mit den nicht idealen Eigenschaften des FG und des OP zusammenhängt. Nun vermessen wir zunächst ohne angeschlossene LC-Kette die Anstiegs- und Abfallszeit des Ausgangssignals. Die Anstiegszeit τ_r bezeichnet diejenige Zeit, die ein Impuls des Signals benötigt, um von 10% auf 90% seiner maximalen Amplitude anzusteigen. Analog dazu nennt man Abfallzeit τ_f die Zeit, in der der Impuls von 90% auf 10% seiner maximalen Amplitude abfällt. Die Messung führen wir mit den Zeit-Cursoren am Oszilloskop durch. Als Größtfehler nehmen wir hier $0,2 \mu\text{s}$ an, was vor allem aus der Anzeigegenauigkeit am Oszilloskop resultiert. Unsere Ergebnisse zeigt die folgende Auflistung:

- **Anstiegszeit:** $\tau_r = 2,3 \pm 0,2 \mu\text{s}$
- **Abfallzeit:** $\tau_f = 10,1 \pm 0,2 \mu\text{s}$

Nun schließen wir nacheinander gemäß Abbildung 3 zwei verschiedene LC-Ketten an (je 5 Glieder der Typen (a) und (b)). Den Abschlusswiderstand R wählen wir so, dass ein reflexionsarmer Fall vorliegt, also das dargestellte Signal so wenig wie möglich verzerrt wird. Zur Bestimmung von R dient folgende Formel:

$$R = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{\sqrt{1 - \omega^2 \frac{LC}{4}}}$$

Wir betrachten nun das Signal am Ausgang des OP und das Signal über R gleichzeitig auf dem Oszilloskop. Eine Skizze für beide Typen von LC-Ketten findet sich in Abbildung 4 unter (2) und (3).

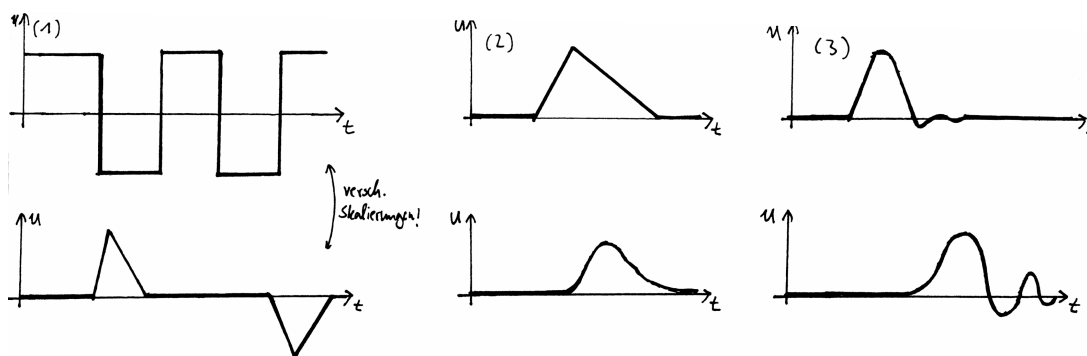


Abb. 4: Signalverläufe ohne LC-Kette, mit 5 Gliedern des Typs (a) und 5 Gliedern des Typs (b).

Nun messen wir für beide Fälle die Anstiegs- und Abfallzeit des Signals über R und erhalten:

- **5 Glieder von Typ (a):**
 - Abschlusswiderstand: $R = 1000 \Omega$
 - Anstiegszeit: $\tau_r = 2,4 \pm 0,2 \mu\text{s}$
 - Abfallzeit: $\tau_f = 9,1 \pm 0,2 \mu\text{s}$

- **5 Glieder von Typ (b):**
 - Abschlusswiderstand: $R = 100 \Omega$
 - Anstiegszeit: $\tau_r = 18,0 \pm 0,2 \mu\text{s}$
 - Abfallzeit: $\tau_f = 14,0 \pm 0,2 \mu\text{s}$

Aus den Anstiegs- und Abfallzeiten sowie den Skizzen erkennen wir, dass das Signal mit den angeschlossenen LC -Ketten im Vergleich zu dem Ausgangssignal des OP verzerrt ist. Zudem wird deutlich, dass die LC -Kette des Typs (a) das Signal unverzerrter und damit besser überträgt. Für die Signalverzerrung ist vor allem die Abbruchfrequenz ω_a verantwortlich, die eine Maximalfrequenz für die übertragenen Wellen darstellt. In Gleichung (11) erkennen wir, dass die Abbruchfrequenz bei gleicher Induktivität L mit zunehmender Kapazität C abnimmt. Somit ist die Abbruchfrequenz für LC -Ketten des Typs (b) niedriger. Stellt man sich das zu übertragende Signal in FOURIER-Komponenten zerlegt vor, so wird deutlich, dass bei den LC -Ketten des Typs (b) aufgrund der niedrigeren Abbruchfrequenz weniger Signalanteile übertragen werden. Daraus resultiert, dass beim Typ (b) die Signalverzerrungen größer sind als beim Typ (a). Da beim Typ (a) ebenfalls eine Abbruchfrequenz vorliegt, wird auch hier das Signal verzerrt übertragen und stellt sich anders dar, als am Ausgang des OP (vgl. Frage 1).

3.2. Verzögerungszeit eines LC-Kettengliedes

Für diesen Versuchsteil benutzen wir wieder eine Schaltung gemäß Abbildung 3. Diesmal benutzen wir als LC -Ketten nacheinander 5 Glieder des Typs (b) und 20 Glieder des Typs (a). Den Abschlusswiderstand stellen wir wiederum auf den reflexionsarmen Fall ein. Wir messen nun die Zeitverzögerung zwischen dem Ausgangssignal des OP und dem Signal über R . Dazu vermessen wir mit Hilfe der Zeitcursor am Oszilloskop die Differenz zwischen den Maxima beider Signale und dividieren die gemessenen Zeiten anschließend durch die Anzahl

der Kettenglieder. Als Fehler der Messung nehmen wir hier $1 \mu\text{s}$ an. Wir vergleichen dann unsere Messwerte mit den theoretischen Erwartungen nach den Gleichungen (12) und (13) für die Fälle $\omega \ll \omega_a$ (th_1) und $\omega = \omega_a$ (th_2). Unsere Messwerte sowie die theoretischen Werte zeigt Tabelle 1.

LC-Kette	$\Delta t / \mu\text{s}$	$\Delta t / \mu\text{s pro Glied}$	$th_1 / \mu\text{s}$	$th_2 / \mu\text{s}$
5 Glieder von Typ (b)	$54 \pm 1,0$	$10,8 \pm 0,2$	10,0	15,7
20 Glieder von Typ (a)	$20 \pm 1,0$	$1,0 \pm 0,05$	1,0	1,6

Tab. 1: Gemessene und erwartete Verzögerungszeiten für verschiedene LC-Ketten.

Wir erkennen also, dass für beide LC-Ketten die gemessenen Werte besser mit den theoretischen Werten für den Fall $\omega \ll \omega_a$ übereinstimmen. Dies lässt sich dadurch erklären, dass die Kreisfrequenz ω des von uns verwendeten Signals von $2\pi \cdot 1 \text{ kHz}$ viel kleiner ist als die Abbruchfrequenzen von 2000 kHz (Typ (a)) und 200 kHz (Typ (b)) der verwendeten LC-Ketten. Die Übereinstimmung zwischen Messwert und theoretischem Wert ist für die LC-Kette des Typs (a) besser, da hier die Abbruchfrequenz um den Faktor 318 mal größer ist als die Signalfrequenz. Bei der LC-Kette des Typs (b) ist die Abbruchfrequenz nur um den Faktor 31,8 mal größer. Somit ist die Voraussetzung $\omega \ll \omega_a$ beim Typ (a) besser erfüllt (vgl. Frage 2).

3.3. Bestimmung des Reflexionskoeffizienten

In diesem Versuchsteil wollen wir den Reflexionskoeffizienten ρ für eine LC-Kette mit 10 Gliedern vom Typ (a) bestimmen. Dazu verwenden wir eine Schaltung gemäß Abbildung 5. Im Vergleich zur vorherigen Schaltung legen wir zusätzlich aus Gründen der Signalanpassung einen Widerstand von $10 \text{ k}\Omega$ vom OP aus gesehen in Reihe. Desweiteren legen wir dahinter parallel zum Eingang der LC-Kette einen Widerstand von $1 \text{ k}\Omega$.

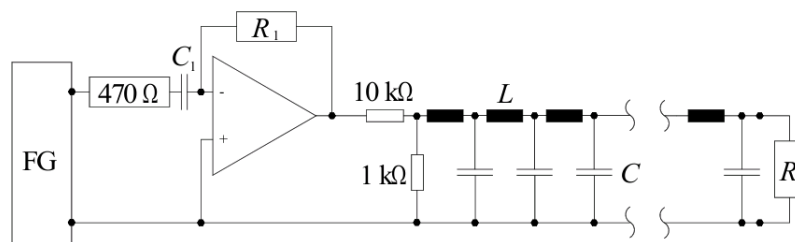


Abb. 5: Versuchsaufbau zur Bestimmung des Reflexionskoeffizienten einer LC-Kette

Als Abschlusswiderstand R wählen wir zunächst das 0,1-fache des im Versuchsteil 3.1. gefundenen Widerstandes für den reflexionsarmen Fall, also $0,1 \cdot 1000 \Omega = 100 \Omega$. Anschließend nehmen wir das 10-fache des Widerstandes für den reflexionsarmen Fall, also $10 \cdot 1000 \Omega = 10 \text{ k}\Omega$. Für beide Abschlusswiderstände bestimmen wir die Amplitude und das Vorzeichen des Eingangssignals U_e und des reflektierten Signals U_r am Eingang der LC -Kette, also über dem $1\text{-k}\Omega$ -Widerstand. Für beide Fälle berechnen wir den Reflexionskoeffizienten ρ nach folgender Gleichung:

$$\rho = \frac{U_r}{U_e}$$

Als Größtfehler für die gemessenen Amplituden nehmen wir $\Delta U = 10 \text{ mV}$ an, was aus der Anzeigegenauigkeit am Oszilloskop resultiert. Somit gilt für den Fehler von ρ :

$$\Delta \rho = \left| \frac{\partial \rho}{\partial U_r} \right| \cdot \Delta U + \left| \frac{\partial \rho}{\partial U_e} \right| \cdot \Delta U = \frac{\Delta U}{U_e} + \frac{U_r \cdot \Delta U}{U_e^2}$$

Wir vergleichen unseren gemessenen Koeffizienten dann mit den theoretischen Werten, die wir gemäß Gleichung (20) bestimmen. Da wir bereits im Versuchsteil 3.2. festgestellt haben, dass für LC -Ketten des Typs (a) die Bedingung $\omega \ll \omega_a$ erfüllt ist, können wir für den Wellenwiderstand Z_0 annehmen:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Dementsprechend gilt für die theoretischen Werte ρ_{theo} :

$$\rho_{theo} = \frac{R - Z_0}{R + Z_0} = \frac{R - \sqrt{\frac{L}{C}}}{R + \sqrt{\frac{L}{C}}}$$

Unsere gemessenen und berechneten Werte zeigt Tabelle 2. Wir erkennen, dass unsere gemessenen Werte für ρ vom Vorzeichen mit den erwarteten Werten übereinstimmen. Beim Betrag ergibt sich jeweils eine Abweichung von etwa 23% bzw. 22%. Diese Abweichungen sind vor allem durch die Dämpfung zu erklären, die in unseren Berechnungen nicht berücksichtigt wurde. Desweiteren können wir davon ausgehen, dass auch einseitig

Reflexionen stattfinden, also am parallel liegenden Eingangswiderstand oder am Ausgangswiderstand des OP. Ebenso treten diese Reflexionen bei allen elektrischen Verbindungen bis zur LC-Kette auf (vgl. Frage 3).

$R / k\Omega$	U_r / mV	U_e / mV	ϱ	ϱ_{theo}
0,1	-440 ± 10	$+410 \pm 10$	$-1,07 \pm 0,05$	-0,82
10	$+430 \pm 10$	$+410 \pm 10$	$+1,05 \pm 0,05$	+0,82

Tab. 2: Gemessene und erwartete Reflexionskoeffizienten für verschiedene Abschlusswiderstände.

3.4. Bestimmung der Abbruchfrequenz und der frequenzabhängigen Phasenverschiebung (Dispersion)

Für diesen Versuchsteil vereinfachen wir unseren Aufbau, indem wir den OP mit seinen Widerständen und seinem Kondensator entfernen. Unsere modifizierte Schaltung zeigt Abbildung 6. Wir stellen am FG ein sinusförmiges Signal, sowie einen Ausgangswiderstand von 50Ω ein. Als LC-Kette verwenden wir 20 Glieder des Typs (a). Als Abschlusswiderstand wählen wir den in 3.1. ermittelten Wert von $R = 1000 \Omega$ für den reflexionsarmen Fall. Auf dem Oszilloskop betrachten wir nun zugleich die Ausgangsspannung U_F des FG und die Spannung U_R am Abschlusswiderstand, welche der Spannung am letzten LC-Glied entspricht.

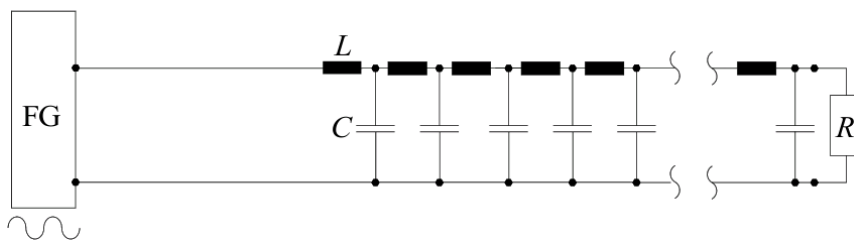


Abb. 6: Versuchsaufbau zur Messung der Abbruchfrequenz und der Phasenverschiebung.

Wir bestimmen nun für 15 Frequenzen des FG-Signals zwischen $\nu = 10 \text{ kHz}$ und $\nu = 320 \text{ kHz}$ die Amplitude U_R am Ende der LC-Kette. Der Betrag der Amplitude von U_F spielt hier keine Rolle, wichtig ist nur, dass er konstant bleibt. Neben der Amplitude bestimmen wir auch für jede Frequenz ν die Phasenverschiebung $\Delta\varphi$ zwischen beiden Signalen, indem wir am Oszilloskop die zeitliche Differenz t zwischen zwei Maxima bestimmen. Dabei ist zu beachten, dass ab einer gewissen Frequenz eine Phasenverschiebung

von $j \cdot 2\pi$ ($j = 1, \dots, n$) zu unserem Messwert hinzuaddieren müssen, da die Phasenverschiebung in unserem Fall Werte über 2π , 4π , ... annehmen kann. Als Fehler der Zeitmessung nehmen wir $0,2 \mu\text{s}$, als Fehler der Spannungsmessung $0,1 \text{ V}$ an (Anzeigegenauigkeit am Oszilloskop). Die Phasenverschiebung $\Delta\varphi$ berechnen wir aus den gemessenen Zeitdifferenzen t wie folgt:

$$\Delta\varphi = \omega \cdot t = 2\pi \nu \cdot t$$

Da der Fehler der am FG einstellbaren Frequenz vernachlässigbar gering ist, nehmen wir als Fehler der Phasenverschiebung an:

$$\Delta\Delta\varphi = \omega \cdot \Delta t = 2\pi \nu \cdot \Delta t$$

Um die theoretisch erwarteten Phasenverschiebungen bestimmen zu können, verwenden wir Gleichung (9), mit der wir die Signallaufzeit τ pro Kettenglied zu berechnen. Da wir 20 LC-Glieder verwenden, muss diese Zeit τ noch mit dem Faktor 20 multipliziert werden. Aus dieser Zeit berechnen wir dann die erwartete Phasenverschiebung $\Delta\varphi_{theo}$:

$$\Delta\varphi_{theo} = 20 \cdot \left(\frac{2}{\omega} \arcsin \frac{\omega \sqrt{LC}}{2} \right) \cdot \omega$$

Unsere gemessenen und berechneten Werte zeigt Tabelle 3.

ν / kHz	ω / kHz	U_R / V	$t / \mu\text{s}$	$\Delta\varphi / \text{rad}$	$\Delta\varphi_{theo} / \text{rad}$
10	62,8	$4,3 \pm 0,1$	$18,0 \pm 0,2$	$1,13 \pm 0,01$	1,26
30	188,5	$4,4 \pm 0,1$	$20,0 \pm 0,2$	$3,77 \pm 0,04$	3,78
50	314,2	$4,0 \pm 0,1$	$19,6 \pm 0,2$	$5,97 \pm 0,06$	6,31
70	439,8	$3,5 \pm 0,1$	$5,6 \pm 0,2$	$8,74 \pm 0,09 (+ 2\pi)$	8,87
90	565,5	$3,4 \pm 0,1$	$8,8 \pm 0,2$	$11,26 \pm 0,11 (+ 2\pi)$	11,47
110	691,2	$3,4 \pm 0,1$	$2,0 \pm 0,2$	$13,95 \pm 0,14 (+ 4\pi)$	14,11
130	816,8	$3,3 \pm 0,1$	$4,8 \pm 0,2$	$16,49 \pm 0,16 (+ 4\pi)$	16,83
150	942,5	$2,8 \pm 0,1$	$0,0 \pm 0,2$	$18,85 \pm 0,19 (+ 6\pi)$	19,63
170	1068,1	$2,3 \pm 0,1$	$2,6 \pm 0,2$	$21,63 \pm 0,21 (+ 6\pi)$	22,54
190	1193,8	$2,3 \pm 0,1$	$5,0 \pm 0,2$	$24,82 \pm 0,24 (+ 6\pi)$	25,59
210	1319,5	$1,7 \pm 0,1$	$2,1 \pm 0,2$	$27,90 \pm 0,26 (+ 8\pi)$	28,82
230	1445,1	$1,5 \pm 0,1$	$4,1 \pm 0,2$	$31,06 \pm 0,29 (+ 8\pi)$	32,30
250	1570,8	$1,1 \pm 0,1$	$2,1 \pm 0,2$	$34,72 \pm 0,31 (+ 10\pi)$	36,13

ν / kHz	ω / kHz	U_R / V	$t / \mu\text{s}$	$\Delta\varphi / \text{rad}$	$\Delta\varphi_{\text{theo}} / \text{rad}$
270	1696,5	$0,8 \pm 0,1$	$0,0 \pm 0,2$	$37,70 \pm 0,34 (+ 12\pi)$	40,51
290	1822,1	$0,4 \pm 0,1$	$3,0 \pm 0,2$	$40,14 \pm 0,36 (+ 12\pi)$	45,83
310	1947,8	$0,2 \pm 0,1$	$2,5 \pm 0,2$	$42,57 \pm 0,39 (+ 12\pi)$	53,67

Tab. 3: Gemessene Spannungsamplituden U_R sowie gemessene und erwartete Phasenverschiebungen $\Delta\varphi$ für verschiedene Frequenzen ν des Signals aus dem FG.

Wir tragen nun zunächst U_R über ν auf und ermitteln durch lineare Regression mit der Software QTIPLLOT die Geradengleichung der Ausgleichsgerade (siehe Abbildung 7). Wir erhalten:

$$U_R(\nu) = -0,0142 \pm 0,0005\nu + 4,764 \pm 0,1$$

Da wir nun die Abbruchfrequenz bestimmen wollen, also die Frequenz, ab der kein Signal mehr übertragen wird, bestimmen wir die Nullstelle der Ausgleichsgerade und erhalten:

$$U_R(\nu) = 0 \Leftrightarrow \nu_0 = \frac{4,766 \text{ kHz}}{0,0147} = 335,5 \text{ kHz}$$

Aus den von QTIPLLOT angegebenen Fehlern der Steigung und des y -Achsenabschnittes der Ausgleichsgeradengleichung können wir den Fehler von ν_0 bestimmen:

$$\Delta \nu_0 = \frac{0,1 \text{ kHz}}{0,0142} + \frac{4,764 \text{ kHz} \cdot 0,0005}{0,0142^2} = 18,9 \text{ kHz}$$

Somit können wir nun nach Multiplikation von ν_0 und $\Delta\nu_0$ mit 2π als gemessene Abbruchfrequenz angeben: $\omega_a = 2108 \pm 118,8 \text{ kHz}$. Zum Vergleich berechnen wir nun die theoretische Abbruchfrequenz $\omega_{a,theo}$ nach Gleichung (11):

$$\omega_{a,theo} = \frac{2}{\sqrt{LC}} = 2000 \text{ kHz}$$

Somit liegt unser Messwert für die Abbruchfrequenz unter Berücksichtigung des Fehlers im Rahmen des theoretischen Wertes.

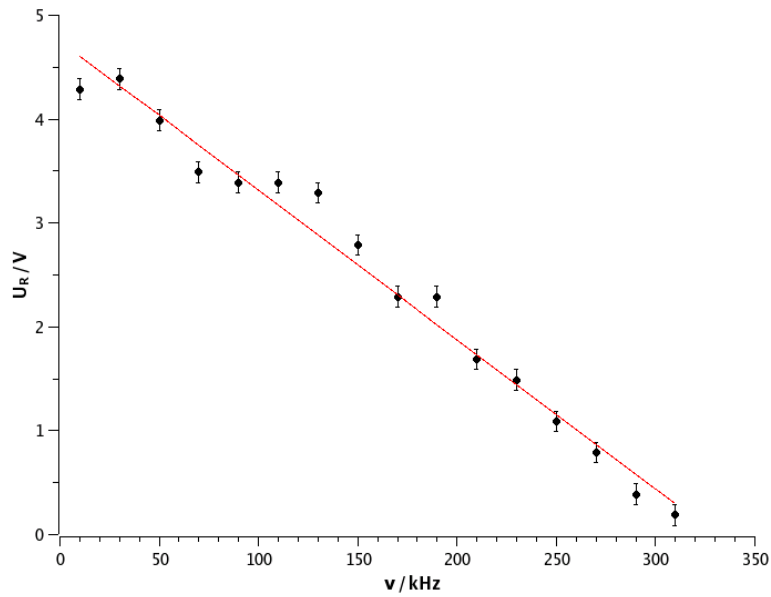


Abb. 7: Spannungsamplituden U_R über verschiedenen Frequenzen ν .

Nun tragen wir die gemessenen und theoretisch erwarteten Phasenverschiebungen $\Delta\varphi$ und $\Delta\varphi_{theo}$ in einem Diagramm über ν auf. Das Ergebnis zeigt Abbildung 8. Wir erkennen, dass beide Kurven für kleine Frequenzen sehr gut übereinstimmen. Bei größeren Frequenzen ab etwa 150 kHz kommt es zu Abweichungen zwischen den gemessenen und theoretischen Werten. Dies könnte darauf zurückzuführen sein, dass wir bei größeren Frequenzen der Abbruchfrequenz immer näher kommen und somit bestimmte Signalanteile nicht mehr übertragen werden, was zu einer ungenauen Messung führt.

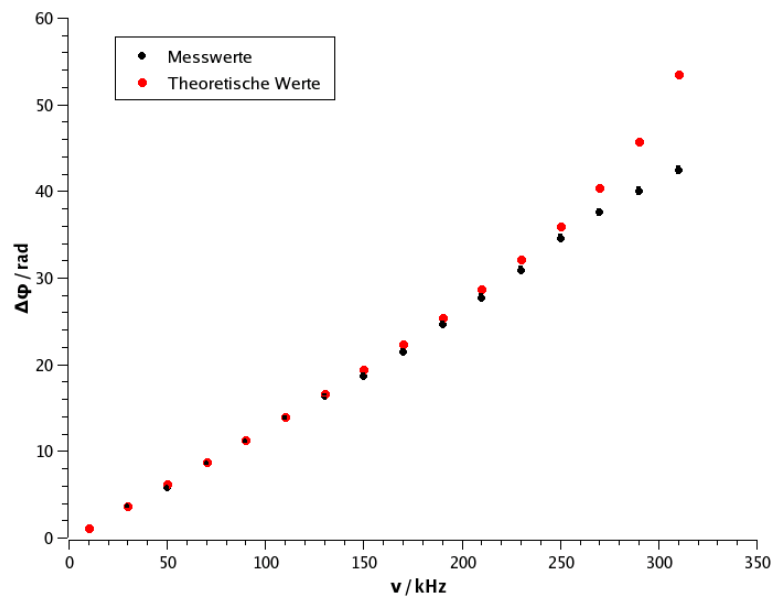


Abb. 8: Gemessene und theoretische Phasenverschiebungen $\Delta\varphi$ über verschiedenen Frequenzen ν .

3.5. Messung der Eindringtiefe als Funktion der Frequenz

Für den letzten Versuchsteil, in dem wir die Eindringtiefe in eine LC -Kette des Typs (a) bestimmen wollen, verwenden wir wieder einen Aufbau gemäß Abbildung 6. Wir wählen am FG eine Kreisfrequenz von $\omega = 2\pi \cdot 350 \text{ kHz}$, so dass die Kreisfrequenz ω größer ist als die Abbruchfrequenz ω_a . Wir messen nun die Spannungsamplitude U_F am Eingang der LC -Kette und die Amplituden U_n hinter den folgenden Kettengliedern mit $n = 1, 2, 3, \dots$. Wir wählen n nur so groß, dass noch eine vernünftige Messung am Oszilloskop möglich ist. Den Fehler der Spannungsmessung geben wir variabel je nach eingestellter Anzeigegenauigkeit am Oszilloskop an. Unsere Messwerte zeigt Tabelle 4.

n	U_F / V	U_n / mV
1	$5,2 \pm 0,1$	2040 ± 10
2	$5,2 \pm 0,1$	1080 ± 10
3	$5,2 \pm 0,1$	590 ± 10
4	$5,2 \pm 0,1$	270 ± 10
5	$5,2 \pm 0,1$	$116 \pm 2,0$
6	$5,2 \pm 0,1$	$64 \pm 2,0$
7	$5,2 \pm 0,1$	$31 \pm 2,0$
8	$5,2 \pm 0,1$	$20 \pm 2,0$

Tab. 4: Gemessene Spannungen U am Eingang der LC -Kette und U_n nach verschiedenen Kettengliedern.

Wir tragen nun U_n über n halblogarithmisch auf und bestimmen den Wert von n , bei dem die Spannungsamplitude U_n auf $1/e$ -tel der Eingangsamplitude U_F ($= 1,91 \text{ V}$) abgesunken ist. Das entsprechende Diagramm zeigt Abbildung 9. Für die Ausgleichsgerade ermitteln wir mit Hilfe der Software QTIPLLOT folgende Geradengleichung:

$$\ln(U_n)(n) = -0,69 \pm 0,02 n + 8,33 \pm 0,08$$

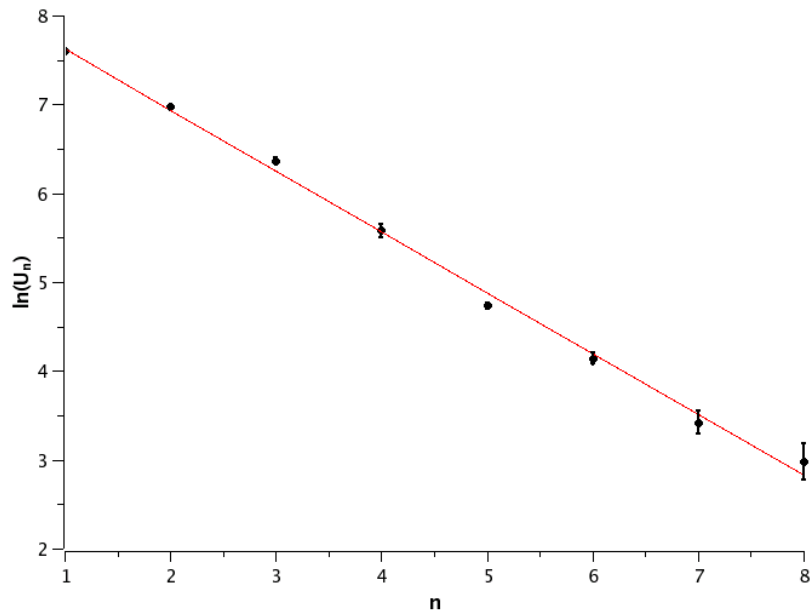


Abb. 9: Halblogarithmische Darstellung der Amplituden U_n über n .

Um den Wert n zu ermitteln, bei dem die Amplitude von U_n auf 1,91 V abgesunken ist, setzen wir $\ln(U_n)(n) = \ln(1910 \text{ mV})$ und lösen nach n auf:

$$\ln(1910) = 7,56 = -0,69n + 8,33 \Leftrightarrow n = \frac{0,77}{0,69} = 1,13$$

Für den Fehler von n gilt:

$$\Delta n = \frac{0,02}{0,69} + \frac{0,77 \cdot 0,08}{0,69^2} = 0,16$$

Wir halten also als Eindringtiefe für LC-Kette des Typs (a) fest: $n = 1,13 \pm 0,16$.

4. Anhang

4.1. Literatur

- [1] Skript zum Anfängerpraktikum Physik II, CvO Universität Oldenburg, Institut für Physik, Oktober 2005
- [2] dtv-Atlas Physik, Band 1 und 2, Deutscher Taschenbuch Verlag, 7. Auflage, August 2004

4.2. Abbildungsnachweis

- **Abb. 1:**
Skript zum Anfängerpraktikum Physik II, siehe [1]
- **Abb. 2:**
Skript zum Anfängerpraktikum Physik II, siehe [1]
- **Abb. 3:**
Skript zum Anfängerpraktikum Physik II, siehe [1]
- **Abb. 5:**
Skript zum Anfängerpraktikum Physik II, siehe [1]
- **Abb. 6:**
Skript zum Anfängerpraktikum Physik II, siehe [1]