

PROTOKOLL ZUM ANFÄNGERPRAKTIKUM PHYSIK

Elektromagnetischer Schwingkreis

Sebastian Finkel
Sebastian Wilken

Versuchsdurchführung:
10. Mai 2006

0. Inhalt

1. Einleitung

2. Theoretischer Teil

2.1. Idealer LC-Schwingkreis

2.2. Realer RLC-Schwingkreis

2.3. Serien-Schwingkreis

2.4. Erzwungene elektromagnetische Schwingungen im Serienkreis mit periodischer Anregung

3. Praktischer Teil

3.1. Eigenfrequenz und Dämpfung im Serienkreis

3.2. Resonanzverhalten des Serienkreises

4. Anhang

4.1. Literatur

4.2. Abbildungsnachweis

5. Anlage (Messwertabellen)

1. Einleitung

Wir wollen in diesem Versuch analog zum harmonischen Oszillator aus Feder und Masse nun den elektrischen Schwingkreis betrachten. Wie wird schon im letzten Semester feststellen konnten, gibt es so etwas wie einen idealen, ungedämpften Oszillator nicht, dies gilt auch für unseren elektrischen Schwingkreis. In unserem Fall führen ohmsche Widerstände der Bauteile zur Dämpfung unseres idealen Systems aus Kondensator und Spule. Weiterhin greifen wir durch unsere Messverfahren viel stärker in das System ein, so dass wir in der Praxis recht schnell komplexe Netzwerke erhalten, deren Analyse recht aufwändig ist. Aus diesem Grund betrachten wir nun zunächst einmal einen idealen LC -Schwingkreis und werden uns schrittweise dem System nähern.

2. Theoretischer Teil

2.1. Idealer LC -Schwingkreis

Wir sehen in Abbildung 1 eine Schaltung mit einem Kondensator der Kapazität C , der zunächst über eine Spannungsquelle mit der Betriebsspannung U_0 aufgeladen wird. Danach wird der Schalter S in Position 2 gebracht, wodurch der Kondensator dann über die Spule mit der Induktivität L entladen wird.

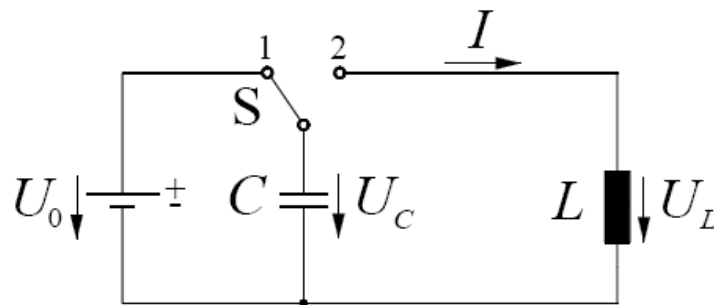


Abb. 1: Idealer LC -Schwingkreis

Sei die Ladung des Kondensator nach der Aufladung gegeben durch:

$$(1) \quad Q_0 = CU_0$$

So ist in ihm die elektrische Feldstärke E_e gespeichert, die sich ergibt aus:

$$(2) \quad E_e = \frac{1}{2} C U_0^2$$

Ab dem Zeitpunkt t_0 , wenn der Schalter in Position 2 gebracht wird, fließt der Entladestrom

$$(3) \quad I(t) = \frac{dQ}{dt}$$

Und für die momentane Spannung am Kondensator ergibt sich dann:

$$(4) \quad U_c(t) = \frac{Q(t)}{C}$$

Damit lässt sich der momentane Entladestrom auch schreiben als:

$$(5) \quad I(t) = -C \frac{dU_c}{dt}$$

Ist der Kondensator nun völlig entladen, ist die elektrische Feldenergie $E_e = 0$ und sämtliche Energie durch die Spule in magnetische Feldenergie E_m umgewandelt:

$$(6) \quad E_m(t) = \frac{1}{2} L I^2(t)$$

Zum Zeitpunkt t_1 sei $E_e = 0$ und dadurch E_m maximal. Nun fließt der maximale Strom $I = I_0$ und der Kondensator beginnt sich nun mit umgekehrter Polarität wieder aufzuladen. Zum Zeitpunkt t_2 ist dieser Vorgang dann abgeschlossen. Vergleichen wir unseren Energien nun mit unserem mechanischen Fall, so entspräche E_e der potenziellen Energie E_{pot} und E_m der kinetische Energie E_{kin} (vgl. Frage 1).

Der Kondensator lädt und entlädt sich, wie wir gesehen haben, periodisch in einem Zeitintervall T . So fällt also eine Wechselspannung mit genau dieser Periode über ihm ab. Genau dies kann man zeigen, wenn man sich jeweils den Spannungsabfall über Spule und Kondensator überlegt und erkennt, dass diese zu jedem Zeitpunkt gleich sein müssen:

$$(7) \quad \frac{Q(t)}{C} - L \frac{dI}{dt} = 0 \quad \text{mit:} \quad U_L(t) = L \frac{dI}{dt}$$

Und somit gilt:

$$(8) \quad \frac{d^2 U_C(t)}{dt^2} + \frac{1}{LC} U_C(t) = 0$$

Wir lösen nun diese Differentialgleichung und stellen sie nach U_C um und erhalten eine Beschreibung für die harmonische Schwingung:

$$(9) \quad U_C(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Wobei U_0 die Amplitude, φ die Anfangsphase und ω_0 die Eigenfrequenz ist, für die gilt:

$$(10) \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Gleichung (9) beschreibt also nun unsere ungedämpfte Schwingung, die nach einmaliger Anregung unendlich lange weiterschwingen würde. In der Realität finden wir aber nur gedämpfte Systeme vor. Wenn wir an dieser Stelle erneut die Parallele zur mechanischen Schwingung suchen, so ergibt sich für Gleichung (8) und (9):

$$(11) \quad m_K \frac{d^2 F(t)}{dt^2} + D \cdot F(t) = 0 \quad \text{und} \quad F(t) = F_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

mit F = Kraft, m_K = Masse und D = Federkonstante (vgl. Frage 2).

2.2. Realer RCL-Schwingkreis

Wir sehen nun in Abbildung 2 eine Schaltung mit so genannten Ersatzschaltbildern, die dem realen Schwingkreis schon wesentlich näher kommt. Am Kondensator haben wir so den Widerstand R_I , der sich hier zusammensetzt aus dem Isolationswiderstand R_C und dem dazu parallelen Eingangswiderstand R_E des angelegten Messgerätes, so dass gilt:

$$(12) \quad \frac{1}{R_I} = \frac{1}{R_C} + \frac{1}{R_E}$$

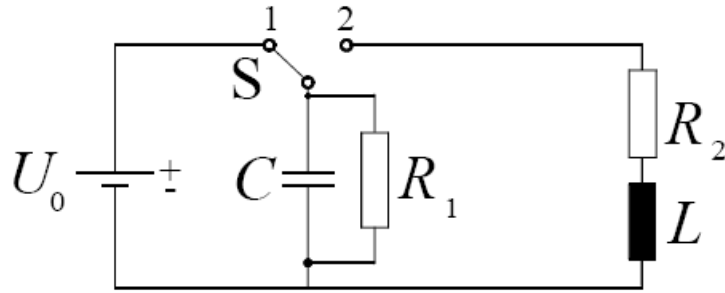


Abb. 2: *Realer RLC-Schwingkreis*

Der Widerstand R_2 ergibt sich dann durch einen in Serie geschalteten Lastwiderstand R und dem Widerstand der Spule R_L :

$$(13) \quad R_2 = R_L + R$$

Dies waren jedoch nur einfache Beispiele, in der Realität kann die Situation durch Fremdkapazitäten und Fremdinduktivitäten oder noch weiteren Widerständen verkompliziert werden. Wir wollen dies jedoch außer Acht lassen, da ihr Einfluss hier zu klein ist und betrachten nun unsere Schaltung zum Zeitpunkt $t = 0$, in der wir den Schalter in Position bringen. Dann erhalten wir für die beiden Maschen jeweils:

$$(14) \quad U_C = U_{R_1} \quad \text{und} \quad U_{R_1} = U_L + U_{R_2}$$

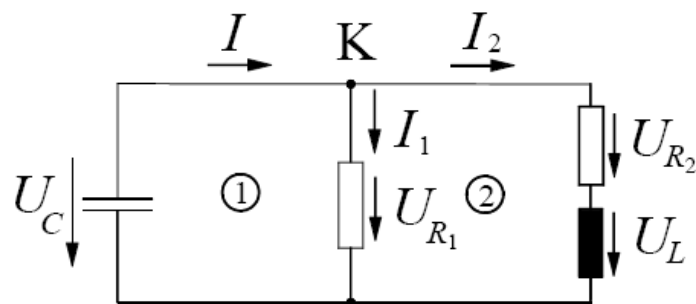


Abb. 3: *Realer RLC-Schwingkreis*

Fassen wir beide Gleichungen zusammen, ergibt sich:

$$(15) \quad U_C - U_L - U_{R_1} = 0$$

Außerdem erhalten wir mit der Knotenregel:

$$(16) \quad I = I_1 + I_2$$

Mit

$$(17) \quad I_1 = \frac{U_{R1}}{R_1} = \frac{U_C}{R_1}, \quad I_2 = -C \frac{dU_C}{dt} - \frac{U_C}{R_1} \quad \text{und} \quad U_L = L \frac{dI_2}{dt}$$

erhalten wir dann aus Gleichung (15):

$$(18) \quad U_C - L \frac{dI_2}{dt} - R_2 I_2 = 0$$

Nutzen wir nochmal die Ergebnisse aus Gleichung (17) sieht unsere Gleichung dann folgendermaßen aus:

$$(19) \quad \frac{d^2 U_C}{dt^2} + a \frac{dU_C}{dt} + b U_C$$

Wobei a und b gegeben sind durch:

$$(20) \quad a := \frac{1}{R_1 C} + \frac{R_2}{L} \quad \text{und} \quad b := \frac{1}{LC} \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right)$$

Gleichung (19) ist wieder eine Differentialgleichung die wir lösen können und dann für die gedämpfte harmonischer Schwingung folgendes Ergebnis erhalten:

$$(21) \quad U_C(t) = U_0 e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi)$$

Mit der Dämpfungskonstanten

$$(22) \quad \alpha = \frac{a}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1 C} + \frac{R_2}{L} \right)$$

Und der Eigenkreisfrequenz

$$(23) \quad \omega = \sqrt{b - \left(\frac{a}{2} \right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{R_1 C} + \frac{R_2}{L} \right)^2}$$

Wir wollen im folgenden Abschnitt Gleichung (21) für einen wichtigen Spezialfall betrachten.

2.3. Serien-Schwingkreis

Wir untersuchen nun das Verhalten eines Schwingkreises für $R_1 \rightarrow \infty$, so dass dieser zu vernachlässigen ist, was jedoch nicht für R_2 gilt, da wir hier gezielt einen Lastwiderstand einsetzen. Wir erhalten dann ein Schaltbild wie in Abbildung 4.

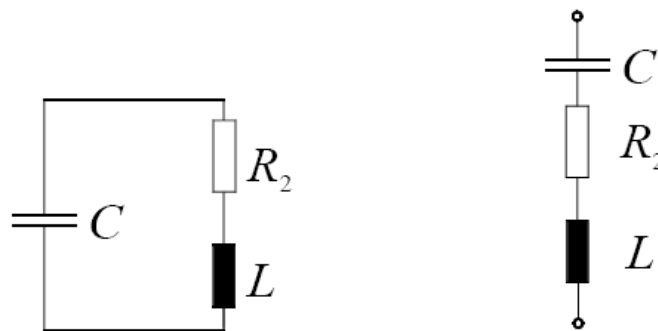


Abb. 4: Gleichwertige Darstellungen eines Serien-Schwingkreises

Die Dämpfungskonstante und die Kreisfrequenz vereinfachen sich dann zu:

$$(24) \quad \alpha = \frac{R_2}{2L}$$

Und der Eigenkreisfrequenz

$$(25) \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{R_2}{4L}\right)^2}$$

Weiterhin gilt für die Halbwertszeit:

$$(26) \quad T_{1/2} = \ln 2 \cdot \frac{2L}{R_2}$$

2.4. Erzwungene elektromagnetische Schwingungen im Serienkreis mit periodischer Anregung

Bisher haben wir uns nur mit einmaliger Anregung unseres Schwingkreises beschäftigt. Nun wollen wir genau betrachten, was passiert, wenn wir den Schwingkreis periodisch anregen. In Abbildung 5 ist unser Serienschwingkreis zu sehen, der durch eine periodische Wechselspannung angeregt wird:

$$(27) \quad U(t) = U_1 \sin(\omega_1 t)$$

Mit der Maschenregel erhalten wir:

$$(28) \quad \frac{d^2 Q(t)}{dt^2} + \frac{R_2}{L} \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{LC} Q(t) = \frac{1}{L} U_1 \sin(\omega_1 t)$$

Für unsere mechanischen Fall aus dem letzten Semester sah unsere Funktion dann folgendermaßen aus:

$$(29) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{D}{m} x = \frac{1}{m} F_1 \sin(\omega_1 t)$$

Mit m = Masse, D = Federkonstante, x = Auslenkung, F_1 = Kraft und b = Reibungskoeffizient (vgl. Frage 3).

Vergleichen wir die Mechanischen Größen mit unseren elektronischen, ergibt sich:

$$x = Q, \quad b = R_2, \quad m = L, \quad D = 1/C, \quad F_1 = U_1$$

Mit dem Lösungsansatz:

$$(30) \quad U(t) = Q_0 \cos(\omega_1 t + \varphi)$$

mit φ als Verschiebung zwischen $Q(t)$ und $U(t)$ und Q_0 als maximale Ladung am Kondensator erhält man dann:

$$(31) \quad Q_0 = \frac{\frac{U_1}{L}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + \left(\frac{\omega_1 R_2}{L}\right)^2}}$$

und

$$(32) \quad \varphi = \arctan \left(-\frac{\frac{\omega_1 R_2}{L}}{\omega_0^2 - \omega_1^2} \right) \quad \{-\pi \text{ für } \omega_1 > \omega_0\}$$

Tragen wir unsere Ergebnisse graphisch auf, erhalten wir die uns schon bekannten Phasenkurven und Amplituden-Resonanzkurven wie in Abbildung 5 zu sehen.

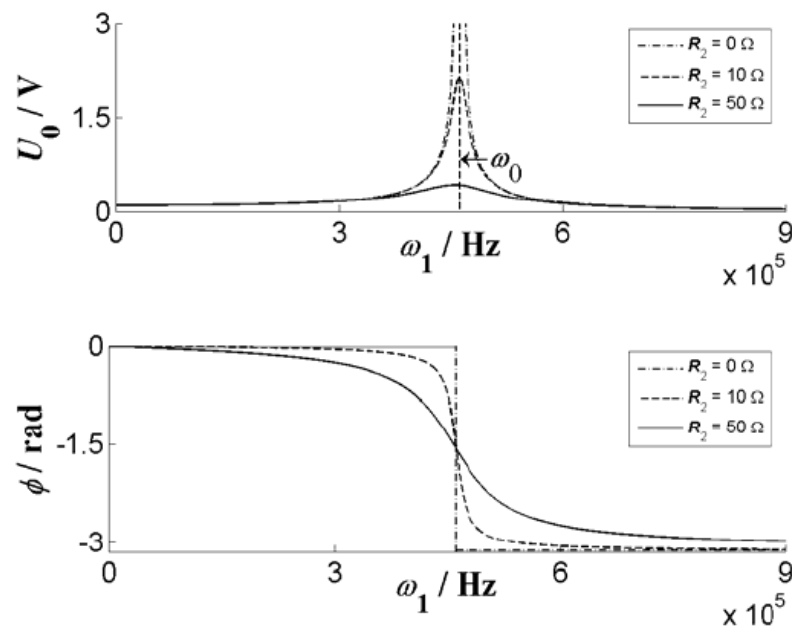


Abb. 5: Amplituden-Resonanzkurven (oben) und Phasenkurven für einen Serienschwingkreis

Tragen wir nun den Strom I_0 über der Frequenz ω_1 auf, mit der unser System angeregt wird, erwarten wir den maximalen Stromfluss genau bei der Eigenfrequenz ω_0 des Systems. Es gilt:

$$I_0 = \omega_1 \cdot Q_0 = \frac{\frac{\omega_1 U_1}{L}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + \left(\frac{\omega_1 R_2}{L}\right)^2}}$$

Dieser Term wird genau dann maximal, wenn $\omega_1 = \omega_0$, da dann der Teil unter dem Bruchstrich minimal wird. Abbildung 6 zeigt den möglichen Verlauf einer solchen Strom/Frequenz-Kurve für den einfachen Fall $L = R_2 = U_1 = \omega_1 = 1$ (vgl. Frage 4):

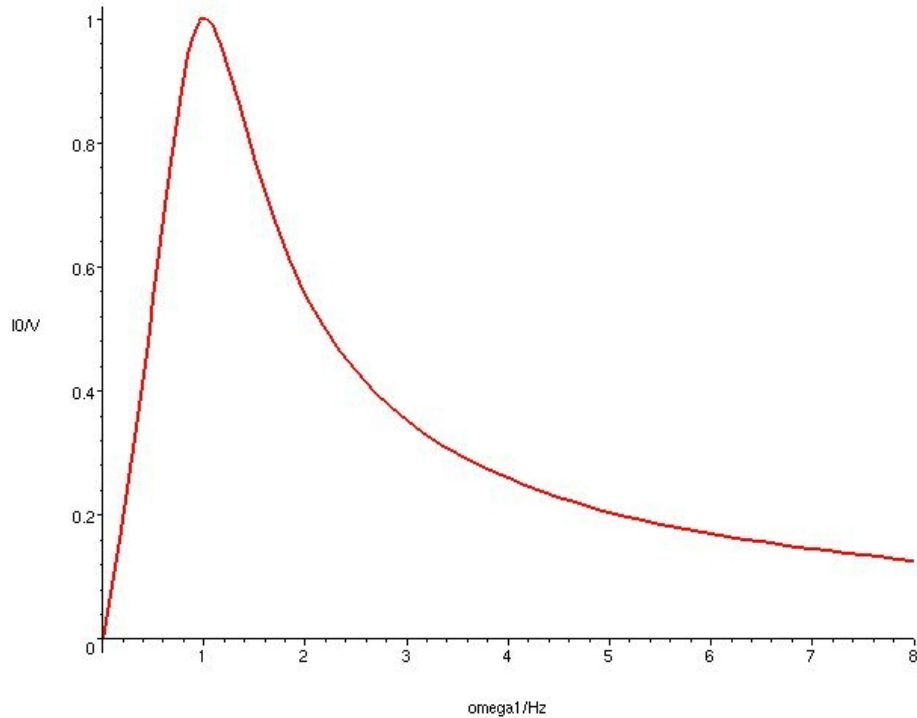


Abb. 6: Möglicher Verlauf für I_0 über ω_1

In der Praxis ist die Ladung recht schlecht zu messen, so dass wir lieber die Spannung am Kondensator messen und es gilt:

$$(33) \quad U_C(t) = \frac{Q_0}{C} \sin(\omega_1 t + \varphi) = U_0 \sin(\omega_1 t + \varphi)$$

3. Praktischer Teil

In den folgenden Versuchsteilen werden wir verschiedene Eigenschaften des elektromagnetischen Schwingkreises untersuchen. Dazu verwenden wir zu Auswertungen ein Digital-Speicher-Oszilloskop, zur Erzeugung von Spannungssignalen einen Funktionsgenerator sowie zwei Widerstands- und je eine Spulen- und Kondensatordekade.

3.1. Eigenfrequenz und Dämpfung im Serienkreis

Wir wollen zunächst das Verhalten eines Serienkreises bei einmaliger Anregung untersuchen. Um eine einmalige Anregung und somit eine einmalige Aufladung des Kondensators zu realisieren, verwenden wir eine Rechteckspannung U als Betriebsspannung. Zunächst bauen wir eine Schaltung gemäß Abb. 8 auf:

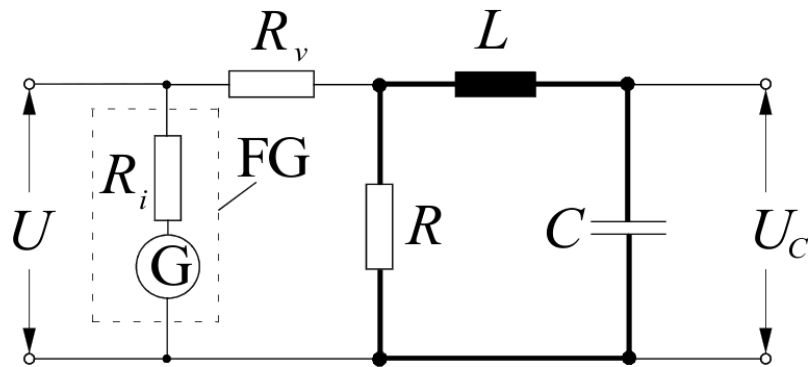


Abb. 7: Serienkreis mit Anregung durch Rechteckspannung U aus Funktionsgenerator FG

Über den Widerstand $R_v = 1 \pm 0,01 \text{ k}\Omega$ (Fehler gemäß Angabe auf der Widerstandsdekade), welcher der Strombegrenzung dient, legen wir eine Rechteckspannung mit einer Amplitude von 10 V , einer Frequenz von 1 kHz an den Widerstand R des Serienkreises. Zu dem Serienkreis gehören noch die Spule L und der Kondensator C . Zur Auswertung der folgenden Versuchsteile betrachten wir die Eingangsspannung U und die Spannung über dem Kondensator U_C gleichzeitig auf dem Oszilloskop.

3.1.1. Eigenkreisfrequenz

Wir wollen nun die Eigenkreisfrequenz ω des Serienkreises in Abhängigkeit des Kondensators C bestimmen. Dazu wählen wir einen Widerstand R von $10 \pm 0,1 \Omega$ und eine Spule L mit einer Induktivität von $470 \pm 23,5 \mu\text{H}$ (Fehler gemäß Angabe auf der Widerstands- und Spulendekade).

Den Wert des Kondensators variieren wir für elf Werte zwischen 0,5 nF und 20 nF. Der Fehler des Kondensators beträgt laut Angabe auf der Kaskade jeweils $\pm 1\%$. Für jeden Kondensator bestimmen wir aus der Frequenz der Spannung U_C die jeweilige Kreisfrequenz gemäß der Formel $\omega = 2\pi \cdot f$. Die Frequenz f bestimmen wir durch Ablesen am Oszilloskop. Dabei nehmen wir einen Ablesefehler von $\pm 0,2 \text{ kHz} = 200 \text{ Hz}$ an. Für den Fehler der Kreisfrequenz gilt somit: $\Delta\omega = 2\pi \cdot \Delta f = 1257 \text{ Hz} = 1,26 \text{ kHz}$. Um die Messwerte mit den theoretisch erwarteten Werten vergleichen zu können, verwenden wir folgende Formel:

$$\omega_{erw} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{R^2}{4L^2}} \quad \text{mit} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Für den Fehler des erwarteten Wertes ω_{erw} gilt gemäß der Fehlerfortpflanzung:

$$\Delta\omega_{erw} = \left| \frac{\partial \omega_{erw}}{\partial R} \right| \cdot \Delta R + \left| \frac{\partial \omega_{erw}}{\partial L} \right| \cdot \Delta L + \left| \frac{\partial \omega_{erw}}{\partial C} \right| \cdot \Delta C$$

Hinweis: Dieser recht komplizierte Ausdruck wurde mit dem Computer-Algebra-System MAPLE ausgewertet. Da die Ergebnisse sehr kompliziert sind, wird auf die exakte Berechnung der Fehler für jeden einzelnen Kondensator verzichtet und stattdessen ein Größtfehler für ω_{erw} von $\pm 5\%$ abgeschätzt. Nun können wir unsere Messwerte und die erwarteten Werte notieren:

C / nF	f / kHz	ω / kHz	ω_{erw} / kHz
0,5 \pm 0,005	284,1 \pm 0,2	1785,05 \pm 1,26	2062,8 \pm 103,1
2 \pm 0,02	156,3 \pm 0,2	982,06 \pm 1,26	1031,4 \pm 51,6
4 \pm 0,04	113,6 \pm 0,2	713,77 \pm 1,26	729,2 \pm 36,5
6 \pm 0,06	93,3 \pm 0,2	586,22 \pm 1,26	595,4 \pm 29,8
8 \pm 0,08	80,7 \pm 0,2	507,05 \pm 1,26	515,6 \pm 25,8
10 \pm 0,1	72,7 \pm 0,2	456,79 \pm 1,26	461,1 \pm 23,1
12 \pm 0,12	67,2 \pm 0,2	422,23 \pm 1,26	420,9 \pm 21,0
14 \pm 0,14	61,9 \pm 0,2	388,93 \pm 1,26	389,7 \pm 19,5
16 \pm 0,16	57,5 \pm 0,2	361,28 \pm 1,26	364,5 \pm 18,2
18 \pm 0,18	54,1 \pm 0,2	339,92 \pm 1,26	343,6 \pm 17,2
20 \pm 0,2	52,1 \pm 0,2	327,35 \pm 1,26	325,9 \pm 16,3

Tab. 1: Gemessene und erwartete Kreisfrequenzen ω für verschiedene Kapazitäten C

Nun können wir die gemessenen Werte für ω sowie die die Funktion der Erwartungswerte in einem Diagramm über den verschiedenen Kapazitäten C auftragen:

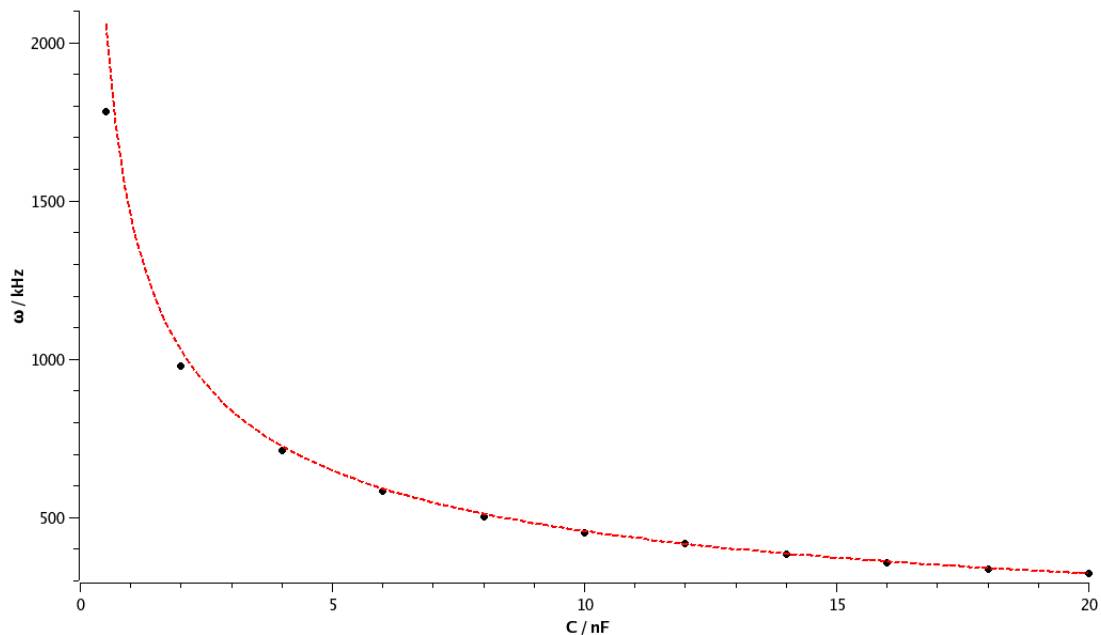


Abb. 8: Messwerte für die Kreisfrequenz ω (schwarz) sowie Funktion der Erwartungswerte (rot) über verschiedenen Kapazitäten C

Es ist eindeutig zu erkennen, dass unsere Messwerte in erster Näherung sehr gut mit den zu erwartenden Werten übereinstimmen. Lediglich bei kleinen Kapazitäten bis circa 5 nF ist eine nennenswerte Abweichung zu erkennen. Dies lässt sich durch die bei der Auswertung vernachlässigten Kapazitäten des verwendeten Kabelmaterials, der Eingangskapazität des Oszilloskops und der Restkapazität der Kondensatordekade erklären. Um diese Einflüsse zu quantifizieren, führen wir die Störkapazität C_S ein, welche addiert mit der an der Kondensatordekade gewählten Kapazität die Gesamtkapazität der Schaltung ergibt. Setzt man nun $C_S + C$ in die Gleichung für die Eigenkreisfrequenz ein und löst nach C_S auf, erhält man:

$$C_S = \frac{1}{L \cdot \omega^2 + \frac{R^2}{4L^2}} - C$$

Mit Hilfe dieser Formel erhalten wir Störkapazitäten um $0,2 \text{ nF} = 200 \text{ pF}$. Dies entspricht größenordnungsmäßig der Kapazität von Koaxialkabeln (vgl. Versuch „Messung von Kapazitäten“ im APR 1). Diese Störkapazität müsste parallel zu C in die Schaltung eingezeichnet werden. (vgl. Frage 5).

3.1.1. Dämpfung

In diesem Versuchsteil wollen wir die Halbwertszeit der Serienschaltung für verschiedene Widerstände R bestimmen. Dazu wählen wir einen Kondensator mit $C = 0,3 \pm 0,003$ nF und eine Spule mit $L = 470 \pm 23,5$ μ H. Als Eingangsspannung U wählen wir wieder eine Rechteckspannung mit einer Amplitude von 10 V und einer Frequenz von 1 kHz. Wir messen nun mit Hilfe des Oszilloskops für zehn verschiedene Widerstände R im Bereich von 5 Ω bis 50 Ω die Halbwertszeit $T_{1/2}$, also die Zeitspanne, in der die Amplitude von U_C auf die Hälfte ihres Anfangswertes abfällt. Dies lässt sich am einfachsten mit Hilfe der Cursor verwirklichen. Für die angezeigte Differenz zwischen beiden Cursors nehmen wir einen Fehler von $\pm 0,5$ μ s an. Zur Berechnung der erwarteten Werte der Halbwertszeiten verwenden wir folgende Formel:

$$T_{1/2;erw} = \ln(2) \cdot \frac{2L}{R}$$

Für den entsprechenden Größtfehler gilt gemäß der Fehlerfortpflanzung:

$$\Delta T_{1/2;erw} = \left| \ln(2) \cdot \frac{-2L}{R^2} \right| \cdot \Delta R + \left| \ln(2) \cdot \frac{2}{R} \right| \cdot \Delta L$$

Nun können wir unsere Messwerte und die theoretischen Werte samt Fehler notieren:

R / Ω	T_{1/2} / μs	T_{1/2;erw} / μs
5 \pm 0,05	34 \pm 0,5	56,6 \pm 0,6
10 \pm 0,1	26 \pm 0,5	28,3 \pm 0,3
15 \pm 0,15	21 \pm 0,5	18,9 \pm 0,2
20 \pm 0,2	18 \pm 0,5	14,1 \pm 0,1
25 \pm 0,25	15 \pm 0,5	11,3 \pm 0,1
30 \pm 0,3	14 \pm 0,5	9,4 \pm 0,1
35 \pm 0,35	12 \pm 0,5	8,1 \pm 0,1
40 \pm 0,4	11 \pm 0,5	7,1 \pm 0,1
45 \pm 0,45	9 \pm 0,5	6,3 \pm 0,1
50 \pm 0,5	8 \pm 0,5	5,7 \pm 0,1

Tab. 2: Gemessene und erwartete Halbwertszeiten $T_{1/2}$ für verschiedene Widerstände R

Tragen wir nun $T_{1/2}$ für die gemessenen und die erwarteten Werte über den Widerständen R auf, erhalten wir folgendes Bild:

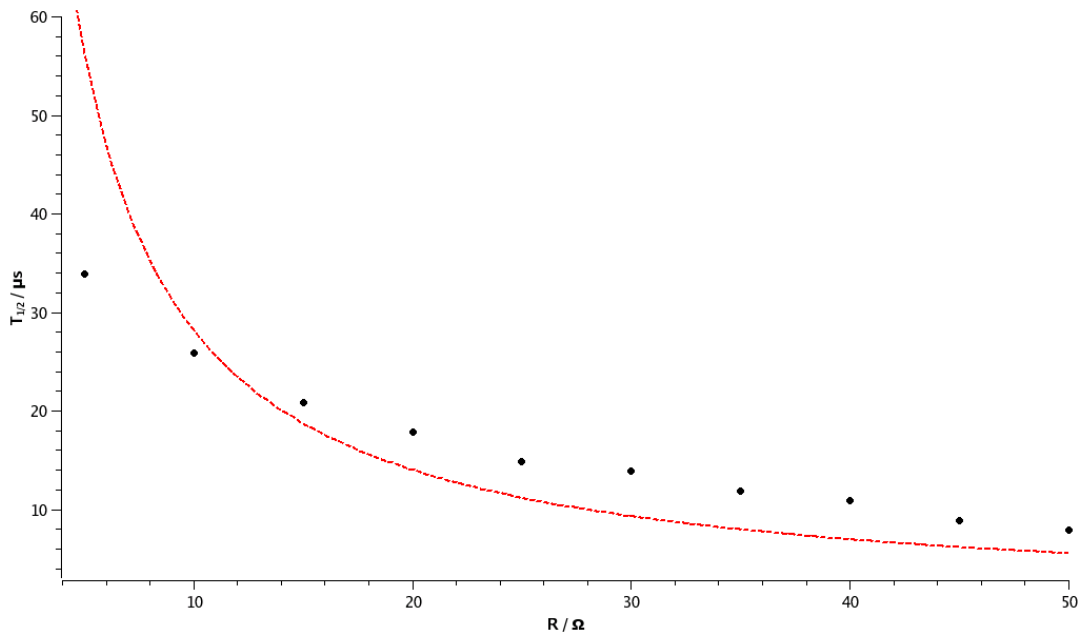


Abb. 9: Messwerte für die Halbwertszeit $T_{1/2}$ (schwarz) sowie Funktion der Erwartungswerte (rot) über verschiedenen Widerständen R

Es ist zu erkennen, dass die erwarteten Werte vor allem im Bereich kleinerer Widerstände deutlich von unseren Messwerten abweichen. Dies ist ähnlich wie bei den Kapazitäten durch einen Störwiderstand R_S in den einzelnen Komponenten unserer Schaltung zu erklären. Im Vergleich zu Versuch 3.1.1 scheinen die Störeinflüsse bei den Widerständen erheblich größer zu sein. Diese berechnen sich wie folgt (Bestimmung der Gleichung wie bei der Störkapazität):

$$R_S = \ln(2) \cdot \frac{2L}{T_{1/2}} - R$$

Nach dieser Formel erhalten wir Störwiderstände um 12Ω . Diese müssten in der Schaltung in Reihe zu R eingezeichnet. Im Verhältnis zu den verwendeten Widerständen von R ist R_S recht groß, wodurch sich die zum Teil großen Unterschiede zwischen den erwarteten und gemessenen Werten erklären lassen (vgl. Frage 6).

3.2. Resonanzverhalten des Serienkreises

Um das Resonanzverhalten des Serienkreises zu untersuchen bauen wir folgende Schaltung auf:

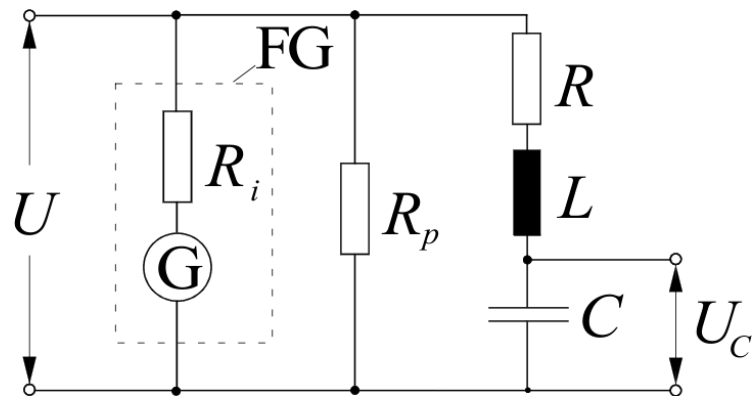


Abb. 10: Schaltung zur Messung von Resonanzkurven am Serien-Schwingkreis

Der Funktionsgenerator liefert eine sinusförmige Wechselspannung $U(t)$ einer Amplitude von $U_1 = 2 \text{ V}$ bei unterschiedlichen Frequenzen im Bereich zwischen 20 kHz und 200 kHz. Die Variation der Frequenz soll automatisch geschehen, weswegen wir wie im letzten Versuch („Operationsverstärker“) die Sweep-Funktion des Funktionsgenerators AGILENT 33120A benutzen. Wir stellen ein Zeitintervall von 500 ms ein, in der die Frequenz schrittweise von 20 kHz auf 200 kHz erhöht wird. Zur Vermeidung von Aliasing-Effekten verwenden wir am Oszilloskop die Option „Erfassung \rightarrow Spitzenwert“, mit der sich das Oszilloskop auf die Darstellung der Einhüllenden des Signals beschränkt. Zur richtigen Triggerung des Frequenz-Sweeps verbinden wir die SYNC-Buchse des Funktionsgenerators mit dem Trigger-Eingang des Oszilloskops. Auf dem Oszilloskopschirm stellen wir die Signale $U(t)$ und $U_C(t)$ gleichzeitig dar.

Wir schalten einen Widerstand $R_p = 1 \pm 0,01 \ \Omega$ parallel zum Funktionsgenerator, damit wir eine für verschiedene Frequenzen ungefähr konstante Amplitude $U_1 = 50 \text{ mV}$ vorliegen haben. Für die Spule wählen wir $L = 470 \pm 23,5 \ \mu\text{H}$ und für den Kondensator $C = 10 \pm 0,1 \text{ nF}$. Wir wollen nun jeweils für die drei Widerstände $R = 1 \pm 0,01 \ \Omega$, $R = 10 \pm 0,1 \ \Omega$ und $R = 50 \pm 0,5 \ \Omega$ eine Amplituden-Resonanzkurve aufnehmen. Dafür messen wir mit Hilfe der Cursor am Oszilloskop für circa 15 verschiedene Frequenzen im Bereich der Resonanzfrequenz die Amplitude U_0 der Spannung $U_C(t)$ über dem Kondensator und die Amplitude U_1 des Eingangssignal $U(t)$. Da U_1 im Bereich größerer Frequenzen leicht ansteigt, bilden wir anschließend den Quotienten U_0/U_1 ,

welchen wir dann über der Kreisfrequenz ω_l auftragen.

Die Kreisfrequenzen ω_l ermitteln wir aus den am Oszilloskopsschirm abgelesenen Zeiten t . Da ein Frequenz-Sweep 500 ms dauert und die Frequenz zwischen 20 kHz und 200 kHz linear ansteigt, können wir daraus leicht Frequenzen f bestimmen. Diese werden dann durch Multiplikation mit 2π in Kreisfrequenzen umgerechnet. Als Ablesefehler für die Zeiten t nehmen wir ± 1 ms an. Daraus folgt ein Fehler für die Kreisfrequenzen von ungefähr ± 1 kHz. Für die Spannungen legen wir einen Größtfehler von $\pm 0,5$ mV fest; für den Fehler des Quotienten U_0/U_1 nehmen wir $\pm 5\%$ an. Für die drei verschiedenen Widerstände haben wir nun folgende Werte ermittelt:

(1) **$R = 1 \pm 0,01 \Omega$**

t / ms	ω_1 / kHz	U_0 / mV	U_1 / V	U_0/U_1
0 ± 1	$125,66 \pm 1$	$50 \pm 0,5$	$56 \pm 0,5$	$1,11 \pm 0,06$
50 ± 1	$238,76 \pm 1$	$51 \pm 0,5$	$68 \pm 0,5$	$1,33 \pm 0,07$
75 ± 1	$295,31 \pm 1$	$51 \pm 0,5$	$80 \pm 0,5$	$1,56 \pm 0,08$
100 ± 1	$351,86 \pm 1$	$52 \pm 0,5$	$124 \pm 0,5$	$2,38 \pm 0,12$
125 ± 1	$408,41 \pm 1$	$52 \pm 0,5$	$200 \pm 0,5$	$3,84 \pm 0,19$
$137,5 \pm 1$	$436,68 \pm 1$	$50 \pm 0,5$	$400 \pm 0,5$	$8,06 \pm 0,4$
150 ± 1	$464,96 \pm 1$	$48 \pm 0,5$	$784 \pm 0,5$	$16,33 \pm 0,82$
$162,5 \pm 1$	$493,23 \pm 1$	$50 \pm 0,5$	$376 \pm 0,5$	$7,58 \pm 0,38$
175 ± 1	$521,5 \pm 1$	$53 \pm 0,5$	$200 \pm 0,5$	$3,79 \pm 0,19$
200 ± 1	$578,05 \pm 1$	$53 \pm 0,5$	$96 \pm 0,5$	$1,82 \pm 0,1$
225 ± 1	$634,6 \pm 1$	$54 \pm 0,5$	$48 \pm 0,5$	$0,9 \pm 0,04$
250 ± 1	$691,15 \pm 1$	$54 \pm 0,5$	$40 \pm 0,5$	$0,74 \pm 0,04$
300 ± 1	$804,25 \pm 1$	$55 \pm 0,5$	$24 \pm 0,5$	$0,43 \pm 0,02$
400 ± 1	$1030,44 \pm 1$	$57 \pm 0,5$	$12 \pm 0,5$	$0,21 \pm 0,01$
500 ± 1	$1256,64 \pm 1$	$59 \pm 0,5$	$4 \pm 0,5$	$0,07 \pm 0,01$

Tab. 3: Gemessene und berechnete Werte für $R = 1 \Omega$

(2) **$R = 10 \pm 0,1 \Omega$**

t / ms	ω_1 / kHz	U_0 / mV	U_1 / V	U_0/U_1
0 ± 1	$125,66 \pm 1$	$51 \pm 0,5$	$40 \pm 0,5$	$0,78 \pm 0,04$
50 ± 1	$238,76 \pm 1$	$52 \pm 0,5$	$56 \pm 0,5$	$1,08 \pm 0,05$
100 ± 1	$351,86 \pm 1$	$52 \pm 0,5$	$112 \pm 0,5$	$2,15 \pm 0,11$
125 ± 1	$408,41 \pm 1$	$52 \pm 0,5$	$192 \pm 0,5$	$3,69 \pm 0,18$

t / ms	ω_1 / kHz	U_0 / mV	U_1 / V	U_0/U_1
$137,5 \pm 1$	$436,68 \pm 1$	$52 \pm 0,5$	$344 \pm 0,5$	$6,62 \pm 0,33$
150 ± 1	$464,96 \pm 1$	$49 \pm 0,5$	$488 \pm 0,5$	$10 \pm 0,5$
$162,5 \pm 1$	$493,23 \pm 1$	$52 \pm 0,5$	$320 \pm 0,5$	$6,15 \pm 0,31$
175 ± 1	$521,5 \pm 1$	$52 \pm 0,5$	$200 \pm 0,5$	$3,85 \pm 0,19$
200 ± 1	$578,05 \pm 1$	$53 \pm 0,5$	$80 \pm 0,5$	$1,52 \pm 0,08$
225 ± 1	$634,6 \pm 1$	$53 \pm 0,5$	$48 \pm 0,5$	$0,9 \pm 0,05$
250 ± 1	$691,15 \pm 1$	$53 \pm 0,5$	$32 \pm 0,5$	$0,6 \pm 0,03$
350 ± 1	$917,35 \pm 1$	$56 \pm 0,5$	$16 \pm 0,5$	$0,29 \pm 0,01$
450 ± 1	$1143,54 \pm 1$	$58 \pm 0,5$	$8 \pm 0,5$	$0,14 \pm 0,01$

Tab. 4: Gemessene und berechnete Werte für $R = 10 \Omega$

(3) $R = 50 \pm 0,5 \Omega$

t / ms	ω_1 / kHz	U_0 / mV	U_1 / V	U_0/U_1
0 ± 1	$125,66 \pm 1$	$52 \pm 0,5$	$52 \pm 0,5$	$1 \pm 0,05$
50 ± 1	$238,76 \pm 1$	$52 \pm 0,5$	$68 \pm 0,5$	$1,31 \pm 0,07$
75 ± 1	$295,31 \pm 1$	$52 \pm 0,5$	$80 \pm 0,5$	$1,54 \pm 0,08$
100 ± 1	$351,86 \pm 1$	$52 \pm 0,5$	$104 \pm 0,5$	$2 \pm 0,1$
125 ± 1	$408,41 \pm 1$	$52 \pm 0,5$	$148 \pm 0,5$	$2,85 \pm 0,14$
150 ± 1	$464,96 \pm 1$	$42 \pm 0,5$	$180 \pm 0,5$	$3,46 \pm 0,17$
175 ± 1	$521,5 \pm 1$	$52 \pm 0,5$	$128 \pm 0,5$	$2,46 \pm 0,12$
200 ± 1	$578,05 \pm 1$	$54 \pm 0,5$	$80 \pm 0,5$	$1,49 \pm 0,07$
225 ± 1	$634,6 \pm 1$	$54 \pm 0,5$	$56 \pm 0,5$	$1,03 \pm 0,05$
250 ± 1	$691,15 \pm 1$	$55 \pm 0,5$	$36 \pm 0,5$	$0,65 \pm 0,03$
300 ± 1	$804,25 \pm 1$	$56 \pm 0,5$	$20 \pm 0,5$	$0,35 \pm 0,02$
400 ± 1	$1030,44 \pm 1$	$58 \pm 0,5$	$12 \pm 0,5$	$0,21 \pm 0,01$
500 ± 1	$1256,64 \pm 1$	$59 \pm 0,5$	$8 \pm 0,5$	$0,14 \pm 0,01$

Tab. 5: Gemessene und berechnete Werte für $R = 50 \Omega$

Nun können wir für jeden Widerstand R eine Amplituden-Resonanzkurve zeichnen, indem wir U_0 / U_1 über ω_1 auftragen:

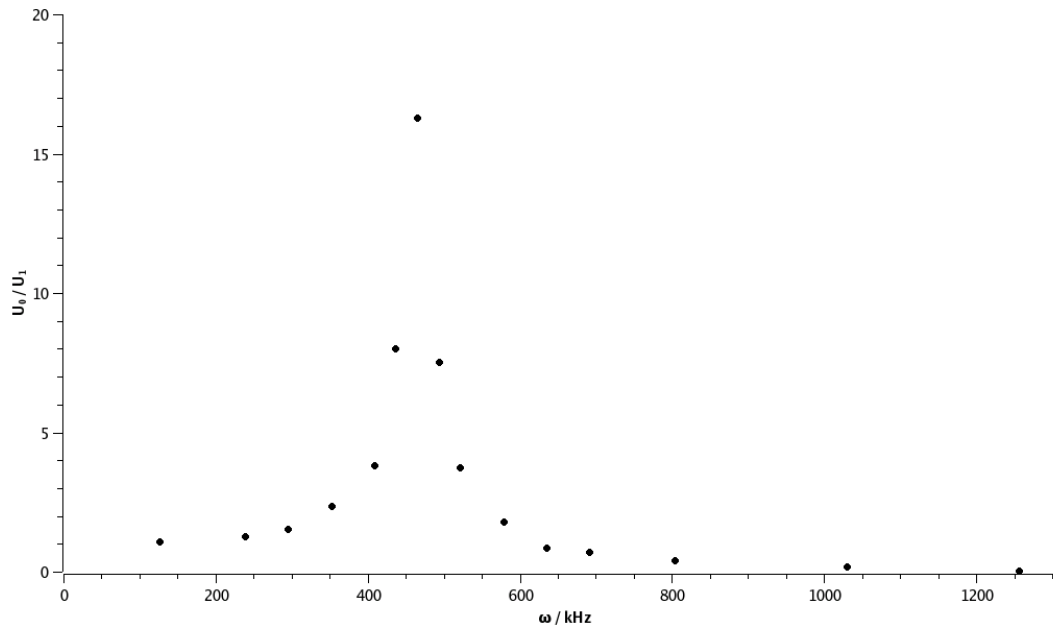


Abb. 11: Amplituden-Resonanzkurve für den Widerstand $R = 1 \Omega$

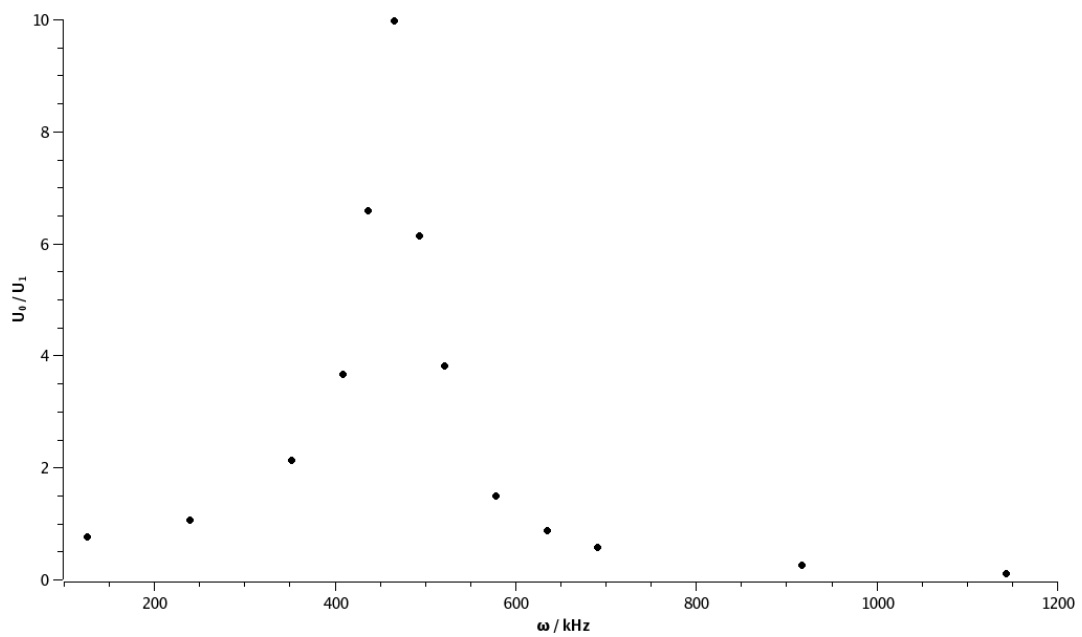


Abb. 12: Amplituden-Resonanzkurve für den Widerstand $R = 10 \Omega$

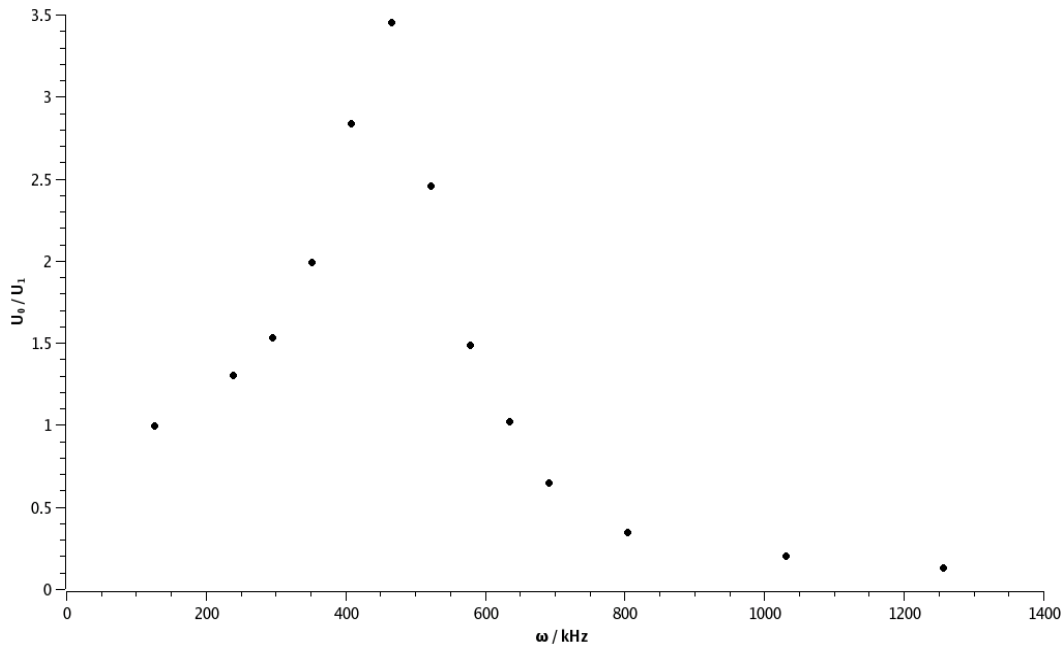


Abb. 13: Amplituden-Resonanzkurve für den Widerstand $R = 50 \Omega$

In allen drei Diagrammen ist ein Maximum bei etwa 460 kHz zu erkennen. Dies entspricht der Resonanzfrequenz ω_0 . Des Weiteren ist zu erkennen, dass der Wert des Maximums mit steigendem Widerstand R abnimmt: Bei $R = 1 \Omega$ beträgt es circa 16,5, bei $R = 10 \Omega$ etwa 10 und bei $R = 50 \Omega$ ungefähr 3,5.

Wir wollen nun die Phasenverschiebung φ zwischen der anregenden Spannung $U(t)$ und der Kondensatorspannung $U_C(t)$ bestimmen. Dazu deaktivieren wir die Sweep-Funktion am Funktionsgenerator und wählen eine sinusförmige Wechselspannung mit einer Amplitude von 2 V. Die Frequenz ν von $U(t)$ variieren wir manuell für 15 Werte zwischen 20 kHz und 200 kHz. Als Dämpfungswiderstand wählen wir $R = 50 \pm 0,5 \Omega$. Wir stellen nun die Signale für $U(t)$ und $U_C(t)$ gleichzeitig auf dem Oszilloskop dar und bestimmen mit Hilfe der Cursor die Zeitdifferenz Δt zwischen zwei Nulldurchläufen der Signale. Dann bestimmen wir den zugehörigen Frequenz, indem wir die Berechnungsvorschrift $\omega_1 = 1/\Delta t \cdot 2\pi$ anwenden. Um nun die Phasenverschiebung bestimmen zu können, müssen wir noch die Anregungsfrequenz ν in Kreisfrequenzen umwandeln, für die gilt: $\omega_0 = \nu \cdot 2\pi$. Dann gilt für die Phasenverschiebung:

$$\phi = -\frac{\omega_0}{\omega_1} \cdot 2\pi = -\frac{\omega_0}{\frac{1}{\Delta t \cdot 2\pi}} \cdot 2\pi = -\Delta t \cdot \omega_0$$

Als Ablesefehler für die Zeitdifferenz Δt nehmen wir $\pm 0,1 \mu\text{s}$ an, als gerätebedingten Fehler der Anregungsfrequenz $\omega_0 \pm 0,0006 \text{ Hz}$. Für den Fehler von ω_1 gilt: $\Delta\omega_1 = 1/(\Delta\Delta t) \cdot 2\pi = 62,8 \text{ Hz}$. Für den Größtfehler von φ gilt somit gemäß Fehlerfortpflanzung:

$$\Delta\phi = |-\Delta t| \cdot \Delta\omega_0 + |-\omega_0| \cdot \Delta\Delta t$$

Um die theoretisch erwarteten Werte der Phasenverschiebung angeben zu können, verwenden wir folgende Formel:

$$\phi_{\text{erw}} = \arctan \left[\frac{-\frac{\omega_1 R}{L}}{\omega_0^2 - \omega_1^2} \right] \left\{ -\pi \text{ für } \omega_1 > \omega_0 \right\}$$

Da die Fehlerbetrachtung für diese Formel zu recht komplizierten und unübersichtlichen ausdrücken führt, schätzen wir einen Fehler von 5% ab. Damit können wir nun die gemessenen und alle daraus errechneten Werte tabellarisch auflisten:

ν / kHz	ω_0 / kHz	$\Delta t / \mu\text{s}$	ω_1 / kHz	φ / rad	$\varphi_{\text{erw}} / \text{rad}$
20 ± 10^{-6}	$125,7 \pm 6 \cdot 10^{-7}$	$1,2 \pm 0,1$	$5235,99 \pm 0,06$	$-0,15 \pm 0,006$	$-0,07 \pm 0,003$
30 ± 10^{-6}	$188,5 \pm 6 \cdot 10^{-7}$	$0,8 \pm 0,1$	$7853,98 \pm 0,06$	$-0,15 \pm 0,009$	$-0,22 \pm 0,005$
40 ± 10^{-6}	$251,3 \pm 6 \cdot 10^{-7}$	$0,9 \pm 0,1$	$6981,32 \pm 0,06$	$-0,23 \pm 0,013$	$-0,18 \pm 0,006$
60 ± 10^{-6}	$376,9 \pm 6 \cdot 10^{-7}$	$1,6 \pm 0,1$	$3926,99 \pm 0,06$	$-0,60 \pm 0,019$	$-0,52 \pm 0,009$
80 ± 10^{-6}	$502,7 \pm 6 \cdot 10^{-7}$	$4,1 \pm 0,1$	$1532,48 \pm 0,06$	$-2,06 \pm 0,025$	$-2,21 \pm 0,012$
90 ± 10^{-6}	$565,5 \pm 6 \cdot 10^{-7}$	$4,5 \pm 0,1$	$1461,21 \pm 0,06$	$-2,84 \pm 0,032$	$-2,84 \pm 0,016$
100 ± 10^{-6}	$628,3 \pm 6 \cdot 10^{-7}$	$4,4 \pm 0,1$	$1396,26 \pm 0,06$	$-2,54 \pm 0,028$	$-2,63 \pm 0,014$
105 ± 10^{-6}	$659,7 \pm 6 \cdot 10^{-7}$	$4,3 \pm 0,1$	$1428,00 \pm 0,06$	$-2,76 \pm 0,031$	$-2,79 \pm 0,015$
110 ± 10^{-6}	$691,1 \pm 6 \cdot 10^{-7}$	$4,0 \pm 0,1$	$1570,80 \pm 0,06$	$-2,76 \pm 0,035$	$-2,87 \pm 0,017$
120 ± 10^{-6}	$753,9 \pm 6 \cdot 10^{-7}$	$3,7 \pm 0,1$	$1698,16 \pm 0,06$	$-2,79 \pm 0,038$	$-2,92 \pm 0,019$
140 ± 10^{-6}	$879,6 \pm 6 \cdot 10^{-7}$	$3,4 \pm 0,1$	$1848,00 \pm 0,06$	$-2,99 \pm 0,044$	$-2,98 \pm 0,022$
160 ± 10^{-6}	$1005,3 \pm 6 \cdot 10^{-7}$	$2,9 \pm 0,1$	$2166,62 \pm 0,06$	$-2,91 \pm 0,050$	$-3,01 \pm 0,025$
180 ± 10^{-6}	$1130,9 \pm 6 \cdot 10^{-7}$	$2,6 \pm 0,1$	$2416,61 \pm 0,06$	$-2,94 \pm 0,057$	$-3,03 \pm 0,028$
190 ± 10^{-6}	$1193,8 \pm 6 \cdot 10^{-7}$	$2,6 \pm 0,1$	$2416,61 \pm 0,06$	$-3,10 \pm 0,060$	$-3,04 \pm 0,030$
200 ± 10^{-6}	$1256,6 \pm 6 \cdot 10^{-7}$	$2,4 \pm 0,1$	$2617,99 \pm 0,06$	$-3,01 \pm 0,063$	$-3,21 \pm 0,031$

Tab. 6: Messwerte für die Zeitdifferenz zwischen $U(t)$ und $U_c(t)$ für verschiedene Anregungsfrequenzen sowie die draus errechnete Phasenverschiebung. Daneben die erwarteten Werte für die Phasenverschiebung.

Nun können wir die Phasenverschiebung φ über der Anregungsfrequenz ω_0 auftragen und erhalten folgendes Diagramm:

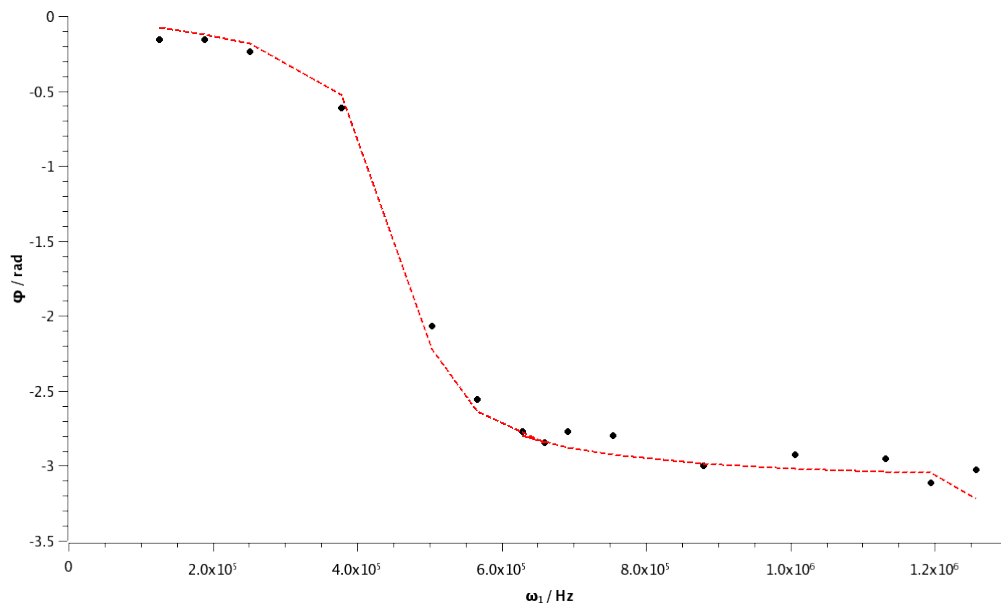


Abb. 14: Gemessene und erwartete Phasenverschiebungen φ über verschiedenen Anregungsfrequenzen ω_0

Wir erkennen bei etwa 460 kHz eine Wendestelle in beiden Graphen. Diese Frequenz entspricht der Resonanzfrequenz unseres Serienkreises und bestätigt das Ergebnis des Teilversuchs zu den Amplituden-Resonanzkurven. Die quantitativen Abweichungen zwischen der Kurve der Messwerte und der Kurve der Erwartungswerte lässt sich durch verschiedene Störeinflüsse (Widerstände und Kapazitäten von Verbindungsmaterial und Messgeräten) sowie Messungenauigkeiten erklären (vgl. Frage 7). Um unsere graphisch ermittelte Resonanzfrequenz mit dem theoretischen Wert vergleichen zu können, verwenden wir die Formel:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Für den Fehler der erwarteten Resonanzfrequenz ergibt sich gemäß Fehlerfortpflanzung:

$$\Delta \omega_0 = \left| \frac{C}{(LC)^{-\frac{3}{2}}} \right| \cdot \Delta L + \left| \frac{L}{(LC)^{-\frac{3}{2}}} \right| \cdot \Delta C$$

Mit Hilfe dieser Formeln und der bekannten Werte für L und C sowie deren Fehler, erwarten wir eine Resonanzfrequenz von $461,3 \pm 23,1$ kHz. Damit liegt unser Messwert im zu erwartenden Bereich.

4. Anhang

4.1. Literatur

- [1] Skript zum Anfängerpraktikum Physik II, CvO Universität Oldenburg, Institut für Physik, Oktober 2005
- [2] dtv-Atlas Physik, Band 2, Deutscher Taschenbuch Verlag, 7. Auflage, August 2004
- [3] Elektronik – Gar nicht schwer Bd. 1 & 2, Adrian Schommers, elektor Verlag Aachen, 18. Auflage, 2005
- [4] <http://de.wikipedia.org/wiki/Schwingkreis>

4.2. Abbildungsnachweis

- **Abb. 1:**
Skript zum Anfängerpraktikum Physik II, siehe [1]
- **Abb. 2:**
Skript zum Anfängerpraktikum Physik II, siehe [1]
- **Abb. 3:**
Skript zum Anfängerpraktikum Physik II, siehe [1]
- **Abb. 4:**
Skript zum Anfängerpraktikum Physik II, siehe [1]
- **Abb. 5:**
Skript zum Anfängerpraktikum Physik II, siehe [1]
- **Abb. 7:**
Skript zum Anfängerpraktikum Physik II, siehe [1]
- **Abb. 10:**
Skript zum Anfängerpraktikum Physik II, siehe [1]