

**PROTOKOLL ZUM ANFÄNGERPRAKTIKUM
PHYSIK**

**Frequenzverhalten passiver
Netzwerke:
Tiefpass, Hochpass und Bandpass**

Sebastian Finkel
Sebastian Wilken

Versuchsdurchführung:
19. Juli 2006

0. Inhalt

1. Einleitung

2. Theoretischer Teil

2.1. Hoch- und Tiefpass

2.2. Bandpass

3. Praktischer Teil

3.1. Zeitkonstanten von Hoch- und Tiefpass

3.2. Frequenzverhalten von Hoch- und Tiefpass

3.3. Resonanzverhalten eines Parallelkreises

4. Anhang

4.1. Literatur

4.2. Abbildungsnachweis

5. Anlage (Messwertabellen)

1. Einleitung

Im letzten Versuch dieses Semesters wollen wir uns mit passiven Netzwerken beschäftigen, genauer gesagt mit dem Frequenz- und Resonanzverhalten Hoch-, Tief- und Bandpässen.

2. Theoretischer Teil

2.1. Hoch- und Tiefpass

Wir betrachten nun zunächst die Abbildungen 1 und 2. Hier sind ein Tief- und ein Hochpass dargestellt. Ihre Namen leiten sich aus ihren Übertragungseigenschaften ab. Sie übertragen entsprechende Frequenzen besonders gut.

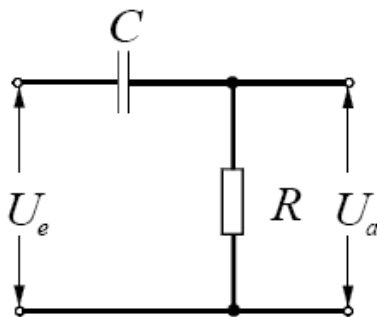


Abb. 1: Hochpass.

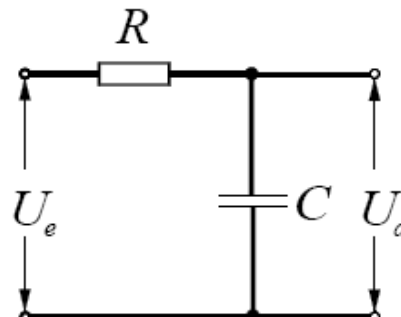


Abb. 2: Tiefpass.

Legen wir nun eine Spannung der Form

$$(1) \quad U_e(\omega, t) = U_{e0} e^{i\omega t}$$

mit der Amplitude U_{e0} und der Kreisfrequenz ω an, so erhalten wir eine Ausgangsspannung U_{a0} mit der Phasenverschiebung φ . Anhand der Ein- und Ausgangsspannung lässt sich die Übertragungsfunktion $H(\omega)$ schreiben als:

$$(2) \quad H(\omega) = \frac{U_a(\omega, t)}{U_e(\omega, t)}$$

Somit erhalten wir für den Tiefpass:

$$(3) \quad H_t(\omega) = \frac{1}{1 + i\omega RC}$$

und für den Hochpass:

$$(4) \quad H_h(\omega) = \frac{i\omega RC}{1 + i\omega RC} \quad \text{bzw.} \quad H_h(\omega) = \frac{1}{1 + \frac{1}{i\omega RC}}$$

Wir wollen nun Übertragungsamplitude und Phasenlage bestimmen (vgl. Frage 1). Dazu nutzen wir folgenden Ansatz:

$$(5) \quad H(\omega) = \operatorname{Re}(H(i\omega)) + i \operatorname{Im}(H(i\omega)) = |H(\omega)| e^{i\varphi}$$

Mit

$$H(\omega) = \sqrt{H(i\omega)H(i\omega)^*} \quad \text{und} \quad \varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(H(\omega))}{\operatorname{Re}(H(\omega))}\right)$$

erhalten wir dann für die Phasenlage und Amplitude des Tiefpasses:

$$(6) \quad |H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad \text{und} \quad \varphi(\omega) = -\arctan \omega RC$$

Für den Hochpass ergibt sich entsprechend:

$$(7) \quad |H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2 R^2 C^2}}} \quad \text{und} \quad \varphi(\omega) = \arctan \frac{1}{\omega RC}$$

Wir skizzieren nun die berechneten Übertragungsfunktionen und Phasenlagen für Hoch- und Tiefpass mit den im Versuchteil verwendeten Werten von R , C und ω (vgl. Frage 2). Die jeweiligen Diagramme sind in den Abbildungen 3 bis 6 zu sehen. In den Abbildungen 3 und 4 erkennen wir gut, woher der Name Hoch- bzw. Tiefpass stammt: Der Tiefpass überträgt tiefe Frequenzen nahezu verlustfrei, während er hohe Frequenzen nur noch zu geringeren Teilen überträgt. Der Hochpass überträgt entsprechend Signale hoher Frequenzen besonders gut.

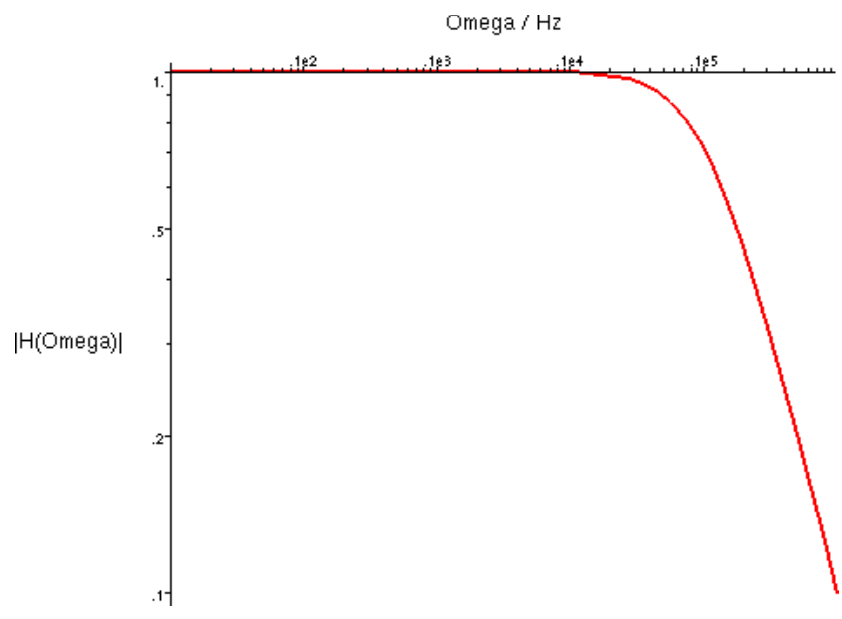


Abb. 3: Übertragungsfunktion für einen Tiefpass.

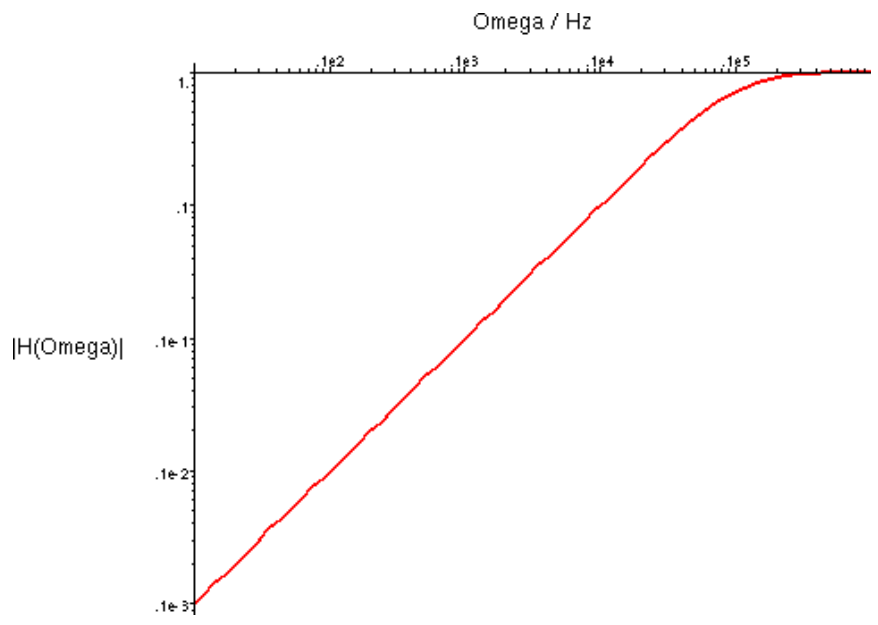


Abb. 4: Übertragungsfunktion für einen Hochpass.

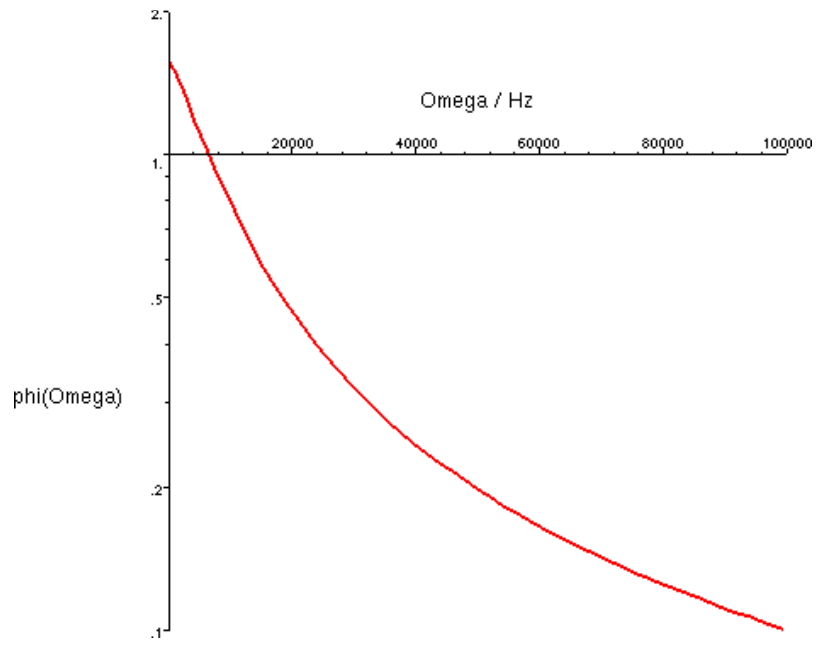


Abb. 5: *Phasenlage für verschiedene Frequenzen bei einem Tiefpass.*

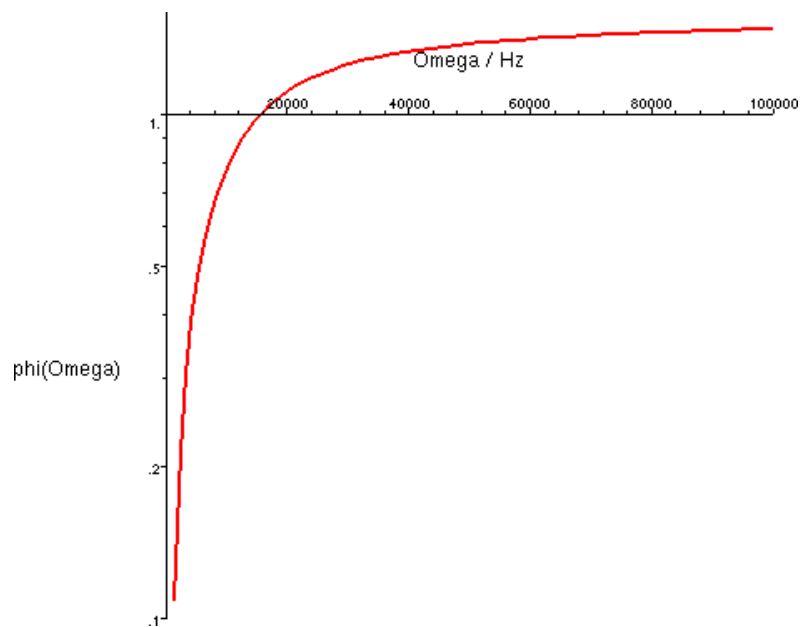


Abb. 6: *Phasenlage für verschiedene Frequenzen bei einem Hochpass.*

Wir wollen suchen nun die Grenzfrequenz, für die gelten soll:

$$(8) \quad |H(\omega_g \rightarrow \infty)| = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_g^2 R^2 C^2}}$$

$$\text{bzw.} \quad |H(\omega_g \rightarrow 0)| = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\omega_g^2 R^2 C^2}}}$$

Mit dem Zusammenhang $2\pi f_g = \omega_g$ erhalten wir dann, wenn wir die Gleichungen nach f_g auflösen:

$$(9) \quad f_g = \frac{1}{2\pi RC} \quad \text{bzw.} \quad \omega_g = \frac{1}{RC} \quad (\text{vgl. Frage 3})$$

Legt man eine Rechteckspannung mit der Amplitude U_s an den Eingang eines RC-Gliedes an, so erhält man die Ausgangsspannungen:

$$(10) \quad U_a(t) = U_s \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \quad (\text{Tiefpass})$$

$$(11) \quad U_a(t) = U_s e^{-\frac{t}{RC}} \quad (\text{Hochpass})$$

Die Zeitkonstante $\tau = RC$ entspricht also dem Kehrwert der Grenzfrequenz (vgl. Frage 4).

2.2. Bandpass

Ein Bandpass ließe sich recht einfach durch eine Hintereinanderschaltung von Hoch- und Tiefpass realisieren. Wir wollen hier jedoch einen *RLC*-Parallelschwingkreis verwenden, das dieser eine genauere Frequenzfilterung ermöglicht. Abbildung 7 zeigt einen solchen Parallelresonanzkreis.

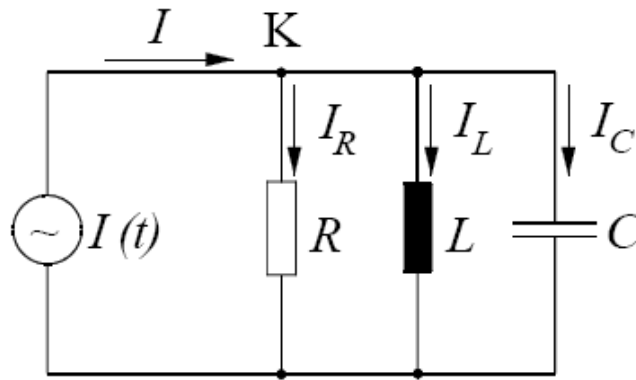


Abb. 7: Parallel-Schwingkreis.

Als Eingangssignal geben wir einen periodischen Wechselstrom mit der Amplitude I_1 auf den Schwingkreis. Dann gilt:

$$(12) \quad I(t) = I_1 e^{i\omega t}$$

Nun können wir mit Hilfe der Knotenregel aussagen, dass gelten muss:

$$(13) \quad I(t) = I_R + I_L + I_C$$

Wir setzen nun entsprechende Ausdrücke für die Ströme ein und erhalten:

$$(14) \quad I(t) = \frac{U(t)}{R} + \frac{1}{L} \int U(t) dt + C \frac{dU(t)}{dt}$$

Differenzieren wir nun diesen Ausdruck und dividieren ihn durch C , so ergibt sich:

$$(15) \quad \frac{d^2 U(t)}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dU(t)}{dt} + \frac{1}{LC} U(t) = \frac{i\omega_1}{C} I_1 e^{i\omega_1 t}$$

Die Lösung dieser Gleichung ist dann:

$$(16) \quad U(t) = U_0 e^{i(\omega_1 t + \phi)}$$

Mit der Eigenfrequenz $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ergibt sich weiterhin für die Resonanzamplitude und die

Phasenlage zwischen Strom und Spannung:

$$(17) \quad U_0(\omega_1) = \frac{\frac{\omega_1 I_1}{C}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + \left(\frac{\omega_1}{RC}\right)^2}}$$

$$(18) \quad \varphi(\omega_1) = \frac{\pi}{2} + \arctan\left(-\frac{\frac{\omega_1}{RC}}{\omega_0^2 - \omega_1^2}\right) \quad \{-\pi \text{ für } \omega_1 > \omega_0 \}$$

Wir wollen nun zeigen, dass wir durch Einsetzen von Gleichung (16) in Gleichung (15) die Ausdrücke aus Gleichung (17) und (18) erhalten:

$$(19) \quad \frac{d^2 U_0 e^{i(\omega_1 t + \phi)}}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dU_0 e^{i(\omega_1 t + \phi)}}{dt} + \frac{1}{LC} U_0 e^{i(\omega_1 t + \phi)} = \frac{i\omega_1}{C} I_1 e^{i\omega_1 t}$$

Nun leiten wir den Term ab, setzen $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$ ein und klammern auf der linken Seite den

Term $U_0 e^{i(\omega_1 t + \phi)}$ aus:

$$(20) \quad U_0 e^{i(\omega_1 t + \phi)} \left(i^2 \omega_1^2 + \frac{1}{RC} i \omega_1 + \omega_0^2 \right) = \frac{i\omega_1}{C} I_1$$

Wir lösen nun nach $U_0 e^{i(\omega_1 t + \phi)}$ und nutzen $i^2 = -1$:

$$(21) \quad U_0 e^{i(\omega_1 t + \phi)} = \frac{i\omega_1 I_1}{C \left(-\omega_1^2 + \frac{1}{RC} i \omega_1 + \omega_0^2 \right)}$$

Wir erweitern den Term nun mit $\left(-\omega_1^2 - \frac{1}{RC} i \omega_1 + \omega_0^2 \right)$ und klammern dann geschickt aus:

$$(22) \quad U_0 e^{i(\omega_1 t + \phi)} = \frac{i\omega_1 I_1 (\omega_0^2 - \omega_1^2) + \frac{\omega_1^2 I_1}{RC}}{C \left((\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + \left(\frac{\omega_1}{RC} \right)^2 \right)}$$

Auch hier haben wir zur Vereinfachung wieder den Zusammenhang $i^2 = -1$ genutzt. Wir bilden nun zuletzt noch den Betrag und erhalten so die Ausdrücke aus Gleichung (17) und (18). Für den Betrag gilt dann:

$$(23) \quad \sqrt{U_0 e^{i(\omega_1 t + \phi)} \cdot U_0 e^{-i(\omega_1 t + \phi)}} = \frac{\sqrt{\left(i\omega_1 I_1 (\omega_0^2 - \omega_1^2) \right)^2 + \left(\frac{\omega_1^2 I_1}{RC} \right)^2}}{\sqrt{C^2 \left((\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + \left(\frac{\omega_1}{RC} \right)^2 \right)^2}} = \frac{\omega_1 I_1 \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + \left(\frac{\omega_1}{RC} \right)^2}}{C \left((\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + \left(\frac{\omega_1}{RC} \right)^2 \right)}$$

Den unteren Term können wir nun als zwei Wurzelausdrücke schreiben, so dass wir kürzen können und erhalten damit Gleichung (17) :

$$(24) \quad U_0(\omega_1) = \frac{i\omega_1 I_1 \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + \left(\frac{\omega_1}{RC} \right)^2}}{C \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + \left(\frac{\omega_1}{RC} \right)^2} \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + \left(\frac{\omega_1}{RC} \right)^2}} = \frac{\omega_1 I_1}{C \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + \left(\frac{\omega_1}{RC} \right)^2}}$$

Für die Phasenverschiebung ergibt dich dann letztlich:

$$\phi(\omega_1) = \arctan \left(\frac{\omega_1 I_1 (\omega_0^2 - \omega_1^2)}{\omega_1 I_1} RC \right) = \left(\left(\frac{\omega_0^2}{\omega_1} - \omega_1 \right) RC \right)$$

Zur Verdeutlichung skizzieren wir nun eine Amplituden-Resonanzkurve sowie eine Phasenkurve. Dazu wählen wir folgende Parameter: $L = 4,7$ mH, $C = 500$ pF, $R = 50$ k Ω , $I_l = 1$ A. Die entsprechenden Diagramme zeigen die Abbildungen 8 und 9 (vgl. Frage 6).

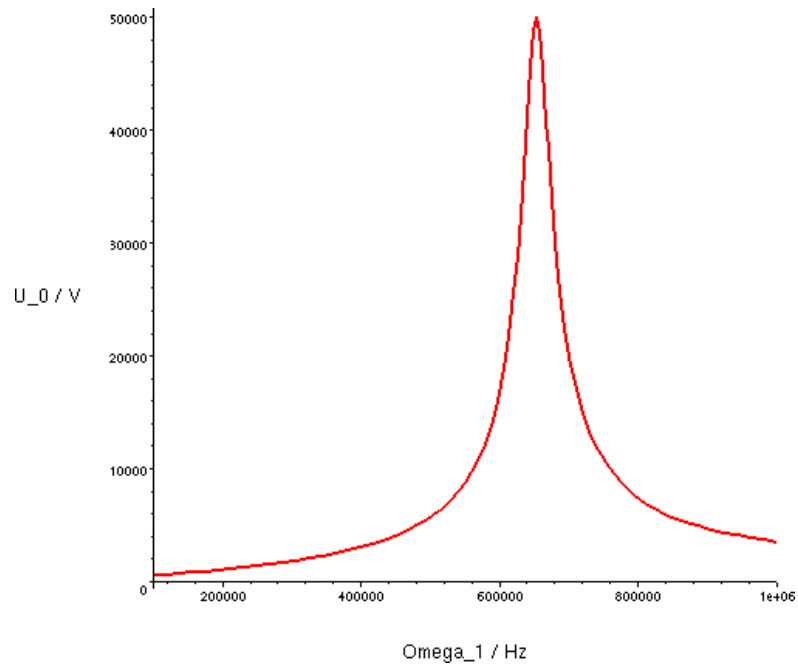


Abb. 8: *Amplituden-Resonanzkurve.*

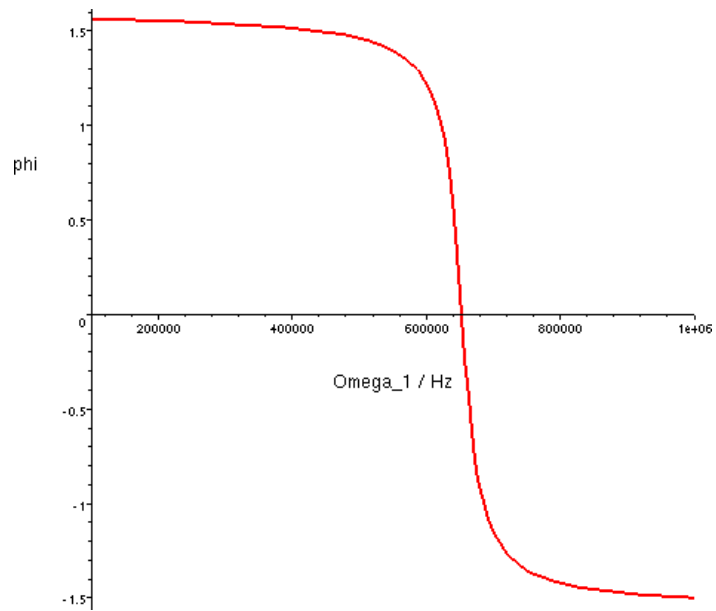


Abb. 9: *Phasenkurve.*

3. Praktischer Teil

In den folgenden Versuchsteilen arbeiten wir mit Widerstands-, Kondensator- und Spulendekaden. Für die Größtfehler der jeweiligen Dekade gilt in allen Versuchen laut Herstellerangabe:

- Widerstandsdekade: $\Delta R = \pm 1\%$
- Kondensatordekade: $\Delta C = \pm 5\%$
- Spulendekade: $\Delta L = \pm 5\%$

3.1. Zeitkonstanten von Hoch- und Tiefpass

Wir wollen nun für den Hoch- und Tiefpass die Zeitkonstanten τ ermitteln, das heißt diejenige Zeit t , innerhalb der die Amplitude des Ausgangssignal U_a eines sprungförmigen Eingangssignales U_e auf das $1/e \approx 0,37$ -fache der maximalen Amplitude abgesunken ist. Dazu bauen wir nacheinander einen Hoch- und einen Tiefpass gemäß der Abbildungen 1 und 2 mit $R = 1 \text{ k}\Omega$ und $C = 100 \text{ nF}$ auf. Als Eingangssignal generieren wir am Funktionsgenerator eine Rechteckspannung mit einer Amplitude von $U_e = 4 \text{ V}$. Beim Hochpass hat das Signal eine Frequenz von $f = 1 \text{ kHz}$, beim Tiefpass von $f = 600 \text{ Hz}$. Wir betrachten nun das Ausgangssignal U_a auf einem Digital-Speicheroszilloskop. Beim Hochpass greifen wir die Spannung über R ab, beim Tiefpass entsprechend über C . Mit Hilfe der Cursor ermitteln wir nun am Oszilloskop zunächst die Halbwertszeit Δt , also die Zeit, bei der das Ausgangssignal seinen Wert halbiert. Der Fehler von t resultiert aus der jeweiligen Einstellungsgegenauigkeit der Cursor. Wir haben dabei folgende Zeiten gemessen:

- Hochpass: $\Delta t = 72 \pm 2 \mu\text{s}$
- Tiefpass: $\Delta t = 70 \pm 10 \mu\text{s}$

Um von den gemessenen Halbwertszeiten Δt auf die Zeitkonstanten τ zu kommen, machen wir uns den Zusammenhang zu Nutze, dass gilt: $\tau = RC$. An der Stelle Δt gilt für die Ausgangsspannung: $U_a(\Delta t) = \frac{1}{2} U_e$. Setzen wir diesen Zusammenhang in die Gleichung 11 für den Hochpass bzw. Gleichung 10 für den Tiefpass ein und lösen nach RC auf, erhalten wir:

$$\text{Hochpass: } \frac{1}{2} U_e = U_e e^{-\frac{\Delta t}{RC}} \Leftrightarrow RC = \tau = \frac{\Delta t}{\ln 2}$$

$$\text{Tiefpass: } \frac{1}{2}U_e = U_e \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{RC}}\right) \Leftrightarrow RC = \tau = \frac{\Delta t}{\ln 2}$$

Es zeigt sich also, dass sich die Halbwertszeiten für Hoch- und Tiefpass in der gleichen Weise in die Zeitkonstante τ umrechnen lassen. Denn Fehler für τ erhalten wir, indem wir den o.a. Ablesefehler durch $\ln 2$ dividieren. Die theoretischen τ_{theo} Werte berechnen wir mit $\tau = RC$. Diese sind für Hoch- und Tiefpass identisch und es gilt:

$$\tau_{theo} = RC = 1000 \Omega \cdot 100 \cdot 10^{-9} F = 1^{-4} s = 100 \mu s$$

Da in die Berechnung der theoretischen Werte mit R und C fehlerbehaftete Größen einfließen, müssen wir auch für die theoretischen Werte einen Größtfehler gemäß der Fehlerfortpflanzung angeben. Für den Fehler von R gilt: $\Delta R = \pm 10 \Omega$ (1%); für den Fehler von C : $\Delta C = \pm 5 \text{ nF}$ (5%). Damit können wir nun den Größtfehler von τ_{theo} bestimmen:

$$\Delta \tau_{theo} = \Delta C \cdot R + \Delta R \cdot C = 5 \cdot 10^{-9} F \cdot 1000 \Omega + 10 \Omega \cdot 100 \cdot 10^{-9} F = 6 \mu s$$

Somit können wir als Ergebnis festhalten:

- Hochpass: $\tau = 103,9 \pm 2,9 \mu s$ $\tau_{theo} = 100 \pm 6 \mu s$ Abweichung: 3,8%
- Tiefpass: $\tau = 101,0 \pm 14,4 \mu s$ $\tau_{theo} = 100 \pm 6 \mu s$ Abweichung: 0,9%

Unsere gemessenen Zeitkonstanten stimmen also sowohl beim Hochpass als auch beim Tiefpass sehr gut mit den zu erwartenden Werten überein.

3.2. Frequenzverhalten von Hoch- und Tiefpass

In diesem Versuchteil wollen wir das Frequenzverhalten von Hoch- und Tiefpass näher untersuchen, indem wir die Amplitudenübertragungsfunktionen $H(\omega)$ und die Grundfrequenzen ω_0 für beide Schaltungen ermitteln. Die Aufbauten erstellen wir wieder wie im letzten Versuch mit $R = 1 \text{ k}\Omega$ und $C = 100 \text{ nF}$. Um die Ausgangsspannung U_a für möglichst viele Frequenzen f bestimmen zu können, benutzen wir die Sweep-Funktion am Funktionsgenerator. Wie bereits aus früheren Versuchen bekannt, erzeugt man mit Hilfe dieser Funktion einen so genannten Frequenzsweep einer bestimmten Länge Δt , innerhalb derer der Funktionsgenerator die Frequenz linear zwischen eingestellter Start- und Endfrequenz erhöht. Als Eingangsspannung wählen wir wieder 4 V. Die Frequenz soll zwischen 1 Hz und 3 kHz erhöht werden. Die Länge eines Sweeps beträgt $\Delta t = 25 \text{ ms}$. Wir

betrachten nun die Ausgangsspannung für Hoch- und Tiefpass auf einem Oszilloskop und messen mit Hilfe der Cursor an verschiedenen Stellen t die Amplitude U_a . Die Zeiten t können wir leicht in Frequenzen f umwandeln, da wir wissen, dass 25 ms 3000 Hz entsprechen. Daraus folgt, dass 1 ms 120 Hz entsprechen muss. Unsere Messergebnisse zeigen die Tabellen 1 und 2. Als Ablesefehler für die Spannung nehmen wir 0,05 V an, was vor allem an der begrenzten Genauigkeit der Spannungsmessung über die Cursor am Oszilloskop resultiert. $H(\omega)$ ermitteln wir als Quotient aus Ausgangsspannung und Eingangsspannung, also $H(\omega) = U_a/U_e$. Für den Fehler von $H(\omega)$ gilt dann gemäß Fehlerfortpflanzung:

$$\Delta H(\omega) = \frac{\Delta U}{U_e} + \frac{U_a \cdot \Delta U}{U_e^2} = \frac{0,05 V}{4 V} + \frac{U_a \cdot 0,05 V}{(4 V)^2}$$

MESSERGEBNISSE FÜR DEN HOCHPASS				
t / ms	f / Hz	ω / kHz	U_a / V	H(ω)
2,7	324	2,04	0,80 ± 0,05	0,20 ± 0,02
3,9	468	2,94	1,12 ± 0,05	0,28 ± 0,02
4,9	588	3,69	1,44 ± 0,05	0,36 ± 0,02
5,7	684	4,30	1,60 ± 0,05	0,40 ± 0,02
7,0	840	5,28	1,92 ± 0,05	0,48 ± 0,02
8,9	1068	6,71	2,40 ± 0,05	0,60 ± 0,02
11,3	1356	8,52	2,72 ± 0,05	0,68 ± 0,02
14,1	1692	10,63	2,96 ± 0,05	0,74 ± 0,02
18,7	2244	14,10	3,20 ± 0,05	0,80 ± 0,02
22,7	2724	17,12	3,36 ± 0,05	0,84 ± 0,02

Tab. 1: Messwerte zur Bestimmung der Amplitudenübertragungsfunktion eines Hochpasses.

MESSERGEBNISSE FÜR DEN TIEFPASS				
t / ms	f / Hz	ω / kHz	U_a / V	H(ω)
0,5	60	0,38	3,92 ± 0,05	0,98 ± 0,02
2,8	336	2,11	4,00 ± 0,05	1,00 ± 0,02
4,1	492	3,09	3,84 ± 0,05	0,96 ± 0,02
5,8	696	4,37	3,68 ± 0,05	0,92 ± 0,02
7,1	852	5,35	3,44 ± 0,05	0,86 ± 0,02
9,2	1104	6,94	3,36 ± 0,05	0,84 ± 0,02

MESSERGEBNISSE FÜR DEN TIEFPASS				
11,6	1392	8,75	$3,04 \pm 0,05$	$0,76 \pm 0,02$
14,2	1704	10,71	$2,72 \pm 0,05$	$0,68 \pm 0,02$
16,3	1956	12,29	$2,48 \pm 0,05$	$0,62 \pm 0,02$
18,3	2196	13,80	$2,32 \pm 0,05$	$0,58 \pm 0,02$
20,8	2496	15,68	$2,16 \pm 0,05$	$0,54 \pm 0,02$
23,1	2772	17,42	$2,00 \pm 0,05$	$0,50 \pm 0,02$

Tab. 2: Messwerte zur Bestimmung der Amplitudenübertragungsfunktion eines Tiefpasses.

Wir tragen nun die Amplitudenübertragungsfunktion $H(\omega)$ für beide Schaltungen doppelt-logarithmisch über der Kreisfrequenz ω auf. Die entsprechenden Diagramme zeigen die Abbildungen 10 und 11. In den Kurvenverläufen ist zu erkennen, dass – wie der Name schon vermuten lässt – der Hochpass hohe Frequenzen besonders gut überträgt, während der Tiefpass entsprechen bei niedrigen Frequenzen ein gutes Übertragungsverhalten zeigt. Wir erkennen zudem, dass unsere Kurven qualitativ gut mit den theoretischen Kurvenverläufen gemäß der Abbildungen 3 und 4 übereinstimmt.

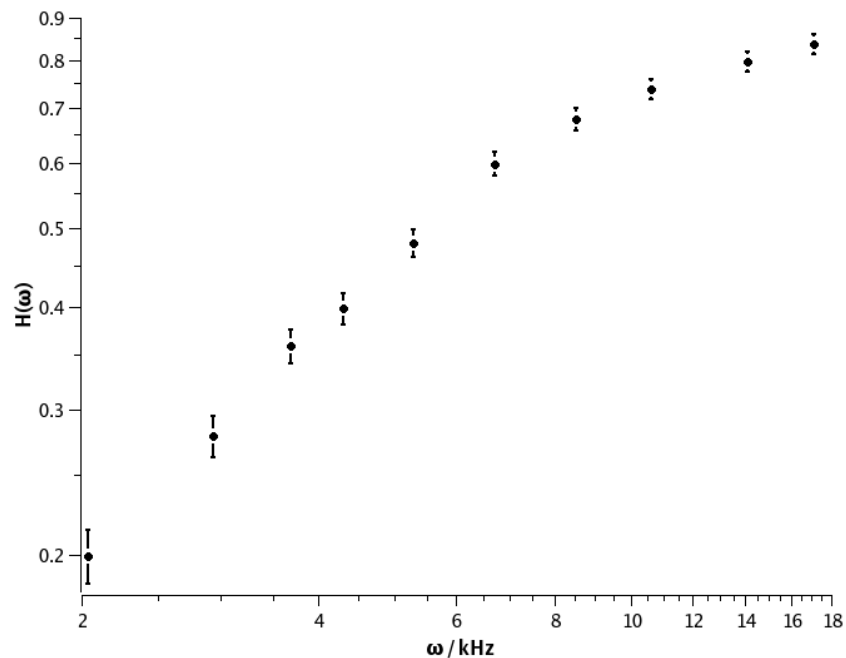


Abb. 10: Amplitudenübertragungsfunktion für einen Hochpass.

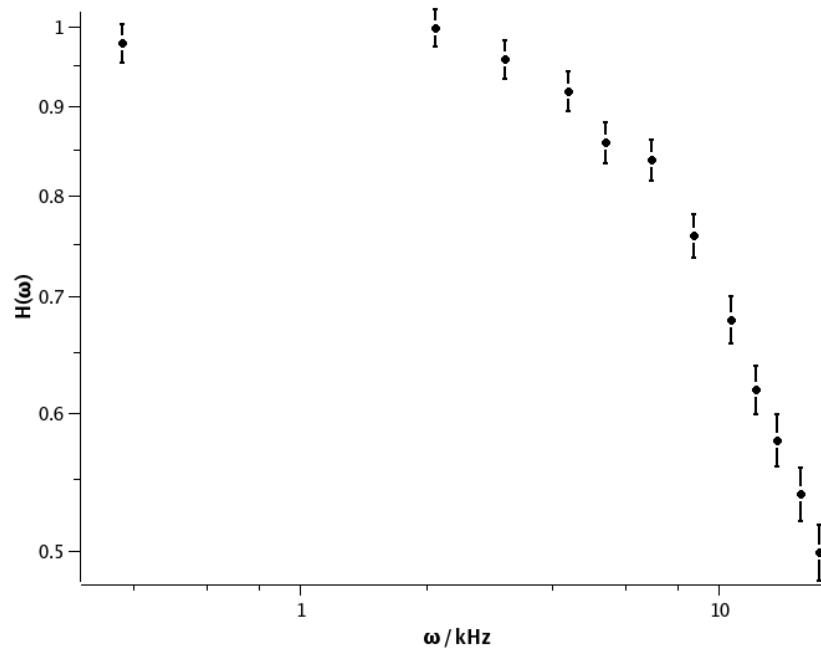


Abb. 11: Amplitudenübertragungsfunktion für einen Tiefpass.

Wir wollen nun aus den Kurvenverläufen die Grenzfrequenzen bestimmen. Dazu betrachtet man in den Diagrammen jeweils die Stelle, an der $H(\omega)$ den Wert $1/\sqrt{2} \approx 0,71$ angenommen hat (vgl. Antwort auf Frage 2). Beim Ablesen aus den Diagrammen nehmen wir einen Ablesefehler von $\Delta\omega = \pm 0,5$ kHz an. Die theoretischen Grenzfrequenzen berechnen wir gemäß Gleichung (9). Für den Fehler der theoretischen Werte gilt gemäß Fehlerfortpflanzung:

$$\Delta\omega_{g;theo} = \frac{\Delta R}{R^2 C} + \frac{\Delta C}{RC^2} = 600 \text{ Hz}$$

Wir erhalten dann:

- Hochpass: $\omega_{gb} = 9,0 \pm 0,5$ kHz $\omega_{gb;theo} = 10 \pm 0,6$ kHz
- Tiefpass: $\omega_{gt} = 10,0 \pm 0,5$ kHz $\omega_{gt;theo} = 10 \pm 0,6$ kHz

Wir erkennen in beiden Fällen, dass die gemessenen Grenzfrequenzen unter Berücksichtigung der Fehler gut mit den theoretischen Werten übereinstimmen.

3.3. Resonanzverhalten eines Parallelkreises

Für den letzten Versuchsteil bauen wir als Beispiel für einen Bandpass einen RLC -Parallelkreis gemäß Abbildung 7 auf. Dabei wählen wir für den Kondensator $C = 500 \pm 25 \text{ pF}$ und für die Spule $L = 4,7 \pm 0,24 \text{ mH}$. Die Fehler resultieren dabei aus den o.a. Größtfehlern der Bauteile. Wir legen zudem noch einen Vorwiderstand von $R_V = 1 \text{ M}\Omega$ in Reihe an. Wir wollen nun für drei verschiedene Widerstände zwischen $10 \text{ k}\Omega$ und $100 \text{ k}\Omega$ die Amplitudenresonanzfunktion aufnehmen. Am Funktionsgenerator legen wir nun ein sinusförmiges Spannungssignal mit einer Amplitude von $U_e = 4 \text{ V}$ an. Wir variieren die Frequenz des Signals nun in einem Bereich zwischen 30 kHz und 150 kHz und messen die Amplitude U_a des Ausgangssignals über dem Kondensator. Dabei legen wir die Messwerte in den „interessanten“ Bereichen um die Eigenfrequenz herum besonders dicht. Der Fehler für die gemessene Spannung resultiert aus der Anzeigegenauigkeit am Oszilloskop, mit dem wir das Ausgangssignal betrachten. Für Spannungen unter 1 V beträgt der Fehler 2 mV , bei Spannungen über 1 V nehmen wir 20 mV an. Unsere Messergebnisse für die drei gewählten Widerstände von $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 10 \text{ k}\Omega$ und $R_3 = 100 \text{ k}\Omega$ zeigt die Tabelle 3. Die entsprechenden Spannungen bezeichnen wir dabei als U_{a1} , U_{a2} und U_{a3} .

f / kHz	ω / kHz	U_{a1} / mV	U_{a2} / mV	U_{a3} / mV
30	188,50	24	32	32
40	251,33	48	48	48
50	314,16	72	72	72
60	376,99	120	128	128
70	439,82	208	256	264
75	471,24	280	424	456
77	483,81			600
80	502,65	350	860	1000
81	508,94		1000	1200
82	515,22		1120	1440
83	521,50		1200	1600
84	527,79		1160	1560
85	534,07	376	1200	1400
86	540,35	375	1000	1220
87	546,64	376	880	1020
88	552,92	378	800	880
89	559,20	360	720	780

f / kHz	ω / kHz	U_{a1} / mV	U_{a2} / mV	U_{a3} / mV
90	565,49	360	640	700
95	596,90	320	460	460
100	628,32	280	360	360
105	659,73	248	300	288
110	691,15	224	260	256
120	753,98	192	208	216
130	816,81	176	192	192
140	879,65	160	172	176
150	942,48	150	168	160

Tab. 3: Messergebnisse zur Bestimmung der Amplitudenresonanzfunktion für verschiedene Widerstände.

Wir tragen nun die gemessenen Ausgangssignale für alle drei Widerstände über der Kreisfrequenz ω in einem Diagramm auf. Das Ergebnis zeigt die Abbildung 12.

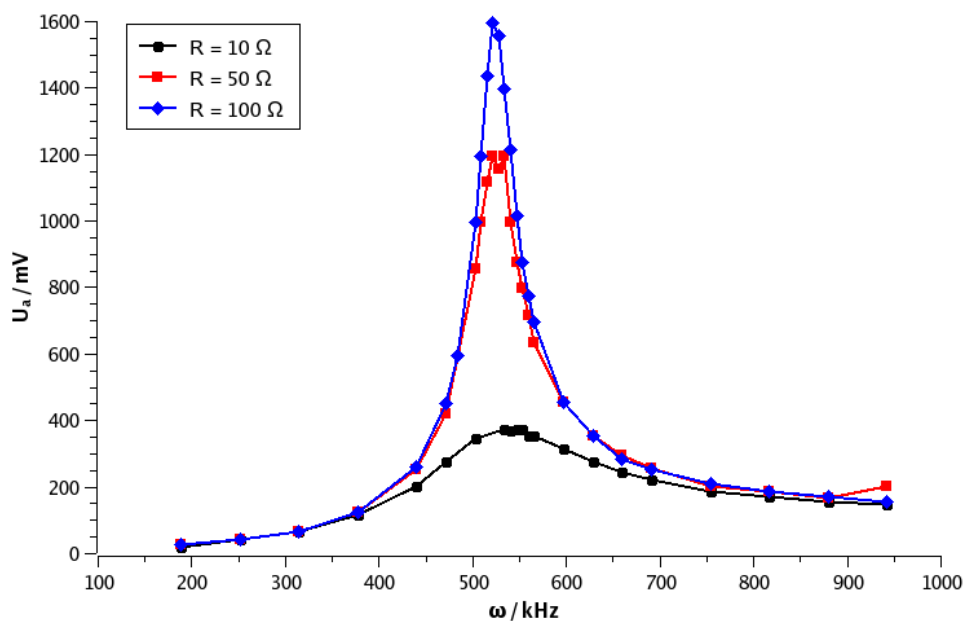


Abb. 12: Amplitudenresonanzkurven für verschiedene Widerstände R_1 , R_2 und R_3 .

In dem Diagramm erkennen wir, dass die Eigenfrequenz, also das Maximum der Kurven, für alle Widerstände etwa im gleichen Frequenzbereich liegt. Zudem ist zu erkennen, dass bei wachsendem Widerstand die übertragene Amplitude bei der Eigenfrequenz größer wird. Bei kleineren bzw. größeren Frequenzen jedoch nähern sich die drei Kurven immer weiter an. Der Vergleich mit dem theoretischen Kurvenverlauf für einen Widerstand von $R = 50 \text{ k}\Omega$ gemäß Frage 6 (vgl. Abbildung 8) zeigt, dass unsere Kurven qualitativ mit den theoretischen

Erwartungen übereinstimmen.

Wir lesen nun die Eigenfrequenzen für die jeweiligen Widerstände ab. Als Ablesefehler nehmen wir hier 10 kHz an. Die theoretischen Werte berechnen wir gemäß der Gleichung:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Für den Fehler der theoretischen Eigenfrequenz gilt:

$$\Delta \omega_{0,theo} = \frac{C \Delta L}{2(LC)^{3/2}} + \frac{L \Delta C}{2(LC)^{3/2}} = 32,27 \text{ kHz}$$

Damit können wir folgende Ergebnisse festhalten:

- **R₁ = 10 kΩ:** $\omega_0 = 540 \pm 10 \text{ kHz}$ $\omega_{0,theo} = 652,33 \pm 32,27 \text{ kHz}$
- **R₂ = 10 kΩ:** $\omega_0 = 530 \pm 10 \text{ kHz}$ $\omega_{0,theo} = 652,33 \pm 32,27 \text{ kHz}$
- **R₃ = 100 kΩ:** $\omega_0 = 520 \pm 10 \text{ kHz}$ $\omega_{0,theo} = 652,33 \pm 32,27 \text{ kHz}$

Wir erkennen also eine Abweichung zwischen Theorie und Praxis zwischen 17% und 20%. Diese relativ große Abweichung lässt sich nicht nur auf die üblichen Messungenauigkeiten zurückführen. Da alle drei Kurven um etwa 110 kHz bis 130 kHz nach links verschoben sind, muss vielmehr ein nicht mehr reproduzierbarer systematischer Messfehler vorliegen.

4. Anhang

4.1. Literatur

- [1] Skript zum Anfängerpraktikum Physik II, CvO Universität Oldenburg, Institut für Physik, April 2006
- [2] dtv-Atlas Physik, Band 1 und 2, Deutscher Taschenbuch Verlag, 7. Auflage, August 2004

4.2. Abbildungsnachweis

- **Abb. 1:**
Skript zum Anfängerpraktikum Physik II, siehe [1]
- **Abb. 2:**
Skript zum Anfängerpraktikum Physik II, siehe [1]
- **Abb. 7:**
Skript zum Anfängerpraktikum Physik II, siehe [1]