

PROTOKOLL ZUM ANFÄNGERPRAKTIKUM PHYSIK

Erzwungene mechanische Schwingungen

Sebastian Finkel
Sebastian Wilken

Versuchsdurchführung:
11. Januar 2006

0. Inhalt

1. Einleitung

2. Theoretischer Teil

- 2.1. Ungedämpfter harmonischer Oszillator
- 2.2. Gedämpfter harmonischer Oszillator
- 2.3. Erzwungene harmonische Schwingungen

3. Praktischer Teil

- 3.1. Beschreibung der Versuchsanordnung
- 3.2. Versuchsdurchführung mit Rizinusöl
- 3.3. Versuchsdurchführung mit Pflanzenöl
- 3.4. Auswertung
- 3.5. Vergleich der Messwerte mit den Erwartungswerten

4. Anhang

- 4.1. Literatur
- 4.2. Abbildungsnachweis

5. Anlage

1. Einleitung

In diesem Praktikumsversuch beschäftigen wir uns mit dem gedämpften harmonischen Oszillator, einer für die gesamte Physik sehr grundlegenden Erscheinung. Als Beispiel für ein oszillierendes System wählen wir eine massive Kugel, die an einer Feder schwingt. Zu Dämpfung lassen wir die Kugel während der Oszillation in zwei verschiedene Ölbäder tauchen.

2. Theoretischer Teil

2.1. Ungedämpfter harmonischer Oszillator

Abb. 1 zeigt ein Feder-Masse-System. Die Kugel der Masse m_k hängt an einer vertikal aufgehängten Feder, so dass wir im Ruhezustand ein Gleichgewicht zwischen Gewichtskraft und der rücktreibenden Kraft der Feder vorliegen haben. Sei in diesem Falle der Mittelpunkt der Kugel auf Höhe von $x = 0$ eines gedachten Koordinatensystems.

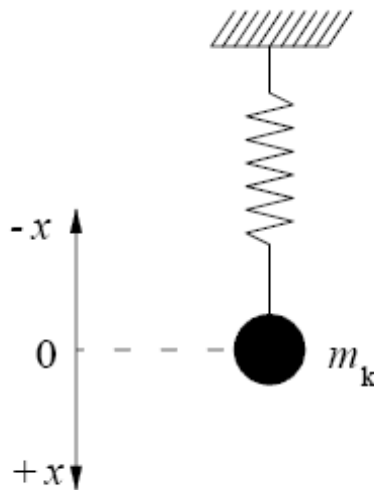


Abb. 1: Ein Masse/Feder-System

Lenken wir die Feder nun um eine Strecke x aus, so müssen wir dafür eine Kraft aufwenden, die proportional zur Auslenkung ist.

$$(1) \quad F_R \propto -x$$

Wir bezeichnen die Proportionalitätskonstante, die so genannte Federkonstante, mit D und erhalten dann:

$$(2) \quad F_R = -Dx$$

Lassen wir die Kugel nach dem Auslenken los, so führt die rücktreibende Federkraft F_R zu einer Beschleunigung mit der Kraft F_B , daher gilt $F_B = F_R$. Ausgeschrieben erhalten wir dafür:

$$(3) \quad m_K a = m_K \frac{d^2 x}{dt^2} = m_K \ddot{x} = -Dx \quad (t \text{ sei die Zeit})$$

Die ersten drei linken Terme sind Äquivalente für die Beschleunigung. Wichtig ist hierbei nun, dass wir anhand einer Gleichung, der so genannten Bewegungsgleichung, das System der Feder für verschiedene Situationen beschreiben können und zwar immer solche, bei denen die Masse an der Feder aus der Ruhelage bewegt wird und dann eine Rücktreibende Kraft wirkt. Nun müssen wir uns eine Gleichung überlegen, die die Bewegung der Feder beschreiben kann. Hierbei sei nun zur Vereinfachung die Anfangsgeschwindigkeit nach dem Loslassen der Feder gleich Null.

Die Lösung ist eine Gleichung, die unter der Bedingung $v(t=0) = 0$ die obige Differentialgleichung erfüllt. In diesen Fall bedienen wir uns unseres Vorwissens über harmonische Schwingungen und „raten“ eine passende Gleichung:

$$(4) \quad x = x_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

Dabei sei x_0 die Amplitude, ω die Eigenfrequenz der Schwingung, t wie üblich die Zeit und φ die Phasenverschiebung. Setzt man nun unsere Gleichung für die harmonische Oszillation (3) ein, differenziert diese zweimal und löst noch ω auf, so erhält man:

$$(5) \quad \omega = \sqrt{\frac{D}{m_K}} := \omega_0$$

Eine Kugel der Masse m_K führt nach dem Loslassen der Auslenkung an der Feder mit der Federkonstante D eine Schwingungen mit der Eigenfrequenz ω_0 durch. Da wir die Reibung hier vernachlässigen, ist die Amplitude x_0 konstant. Da x_0 und φ freie Parameter sind, müssen sie entsprechend so gewählt werden, dass Gleichung (4) den Schwingungsvorgang richtig beschreibt.

Betrachten wir den Schwingungsvorgang genau, fällt auf, dass wir nicht nur die Reibung vernachlässigt haben, sondern bisher auch davon ausgegangen sind, dass die Feder masselos ist. Für den Fall, dass die Masse der Feder m_F gegenüber m_K vernachlässigbar klein ist, ist unsere Funktion weiterhin gültig. Sollte dies jedoch nicht der Fall sein, muss die Federmasse zusätzlich

berücksichtigt werden. Wenn wir nun die Masse der Feder berücksichtigen wollen, haben wir das Problem, dass die Masseelemente alle unterschiedlich weit von Nullpunkt der Schwingungsamplitude entfernt sind. Wir vereinfachen diesen Zusammenhang, indem wir festlegen, dass sämtliche Massepunkte gewichtet nach dem Abstand zum Schwingungsnulldpunkt $1/3$ der Gesamtmasse mit der Amplitude x_0 entsprechen. So erhalten wir als folgende Gleichung:

$$(6) \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m_K + \frac{1}{3}m_F}} := \sqrt{\frac{D}{m}} \quad \text{mit } m := m_K + \frac{1}{3}m_F$$

Wir berechnen nun im Folgenden ein kurzes Beispiel. Wir betrachten dabei den Versuchsaufbau aus Abb. 1. Die Kugel habe die Masse $m = 0,1\text{kg}$ und werde um die Strecke $x_0 = 0,05\text{m}$ ausgelenkt. Die Federkonstante sei $D = 28\text{kg/s}^2$ und die Masse der Feder sei $m_F = 0,02\text{kg}$. Wir lenken die Kugel um x_0 aus und lassen sie anschließend los, danach stellt sich eine Schwingung mit der Eigenfrequenz $\nu_0 = \omega_0/2\pi \approx 2,6 \text{ Hz}$ ein. Wir zeichnen den Verlauf von $x(t)$ und erhalten eine Sinuskurve wie in Abb. 2.

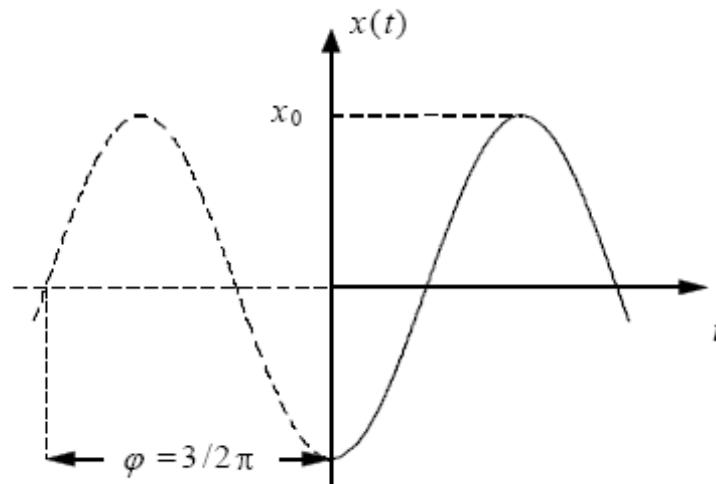


Abb. 2: Sinuskurve für die Schwingung einer Kugel an einer Feder

Hat die Kugel zu Beginn der Aufzeichnung den maximalen Ausschlag, so ist der Sinus gerade minimal und es ergibt sich für die Phasenverschiebung $\varphi = 3\pi/2 = 270^\circ$.

Man nennt ein solches Feder-Masse-System einen harmonischen Oszillator. Er zeichnet sich durch Bewegungsgleichungen in Form von Gleichung (3) und (4) aus und somit durch einen parabolischen Verlauf der potentiellen Energie E_P :

$$(7) \quad E_p = \frac{1}{2} D \cdot x^2$$

Wir wollen kurz die Herleitung dieses Zusammenhangs erläutern (vgl. Frage 1). Dazu bedienen wir uns folgendes Ansatzes, der uns bekannt ist:

$$E_p = F \cdot x \Leftrightarrow dE_p = F \cdot dx$$

Hier setzen wir nun für F die Federkraft ein, integrieren und erhalten:

$$\int dE_p = \int Dxdx$$

$$E_p = \frac{1}{2} Dx^2$$

2.2. Gedämpfter Harmonischer Oszillator

Für den realistischen Fall, dass wir auch zusätzlich eine von der Geschwindigkeit abhängige Reibung haben, müssen wir nun noch eine zweite Kraft einführen. Wir gehen in dem Fall davon aus, dass die Reibungskraft F_b abhängig von der Geschwindigkeit v ist.

$$(8) \quad F_b = -bv = -b \frac{dx}{dt}$$

b ist hier der Reibungskoeffizient, der die Stärke der Reibung angibt. Das negative Vorzeichen ergibt sich dadurch, dass die Reibungskraft entgegengesetzt zur Beschleunigung des Systems wirkt. Als Einheit ergibt sich kg/s , da das Produkt von Geschwindigkeit und Reibungskoeffizient eine Kraft sein muss und sich somit die Einheit Newton ergeben muss (vgl. Frage 2). Probe:

$$\frac{kg}{s} \cdot \frac{m}{s} = kg \cdot \frac{m}{s^2} = N$$

Für die neue Bewegungsgleichung ergibt sich dann:

$$(9) \quad m \frac{d^2x}{dt^2} = -Dx - b \frac{dx}{dt}$$

Wir schreiben sie nun noch so um, wie sie meist notiert wird:

$$(10) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{D}{m} x = 0$$

Nun überlegen wir uns zunächst wieder, welche Bewegung wir erwarten, wenn wir die Kugel auslenken und loslassen. Die Anfangsgeschwindigkeit sei dabei wieder Null. Wir benötigen also erneut eine Funktion $x(t)$, die unter der Bedingung $v(t=0) = 0$ die Differentialgleichung löst. Dazu nehmen wir unseren Ansatz für die ungedämpfte Schwingung und überlegen uns das wir als Folge der Dämpfung eine mit der Zeit abnehmende Schwingung erhalten werden und fügen für unseren Lösungsansatz einen derartigen Faktor hinzu, dass die Amplitude exponential abfällt. Damit ergibt sich dann:

$$(11) \quad x = e^{(-\alpha t)} x_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad \alpha: \text{Dämpfungskonstante}$$

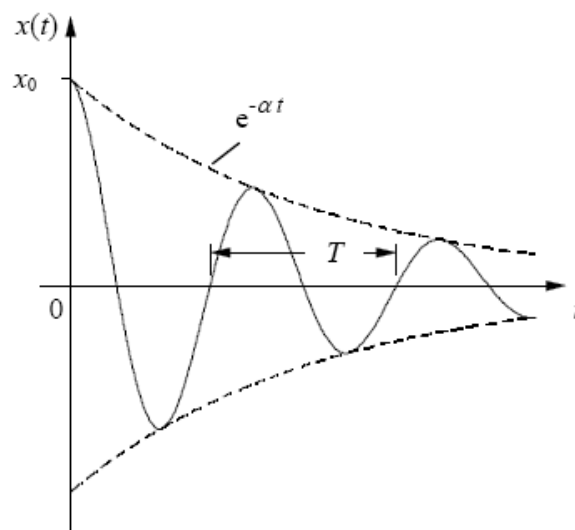


Abb. 3: Gedämpfte harmonische Schwingung

Wir gehen nun erneut wie bei der ungedämpften Schwingung vor, setzen die Bewegungsgleichung (11) in die Differentialgleichung (10) ein und führen die Differentiationen durch. Es ergibt sich, dass die Gleichung genau dann eine Lösung hat, wenn für a und ω gilt:

$$(12) \quad \alpha = \frac{b}{2m}$$

$$(13) \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

Wir wollen uns nun detaillierter überlegen, was dieses Ergebnis für unsere Schwingung bedeutet. Je größer die Dämpfungskonstante a (auch Abklingkoeffizient genannt) ist, desto schneller fällt die Amplitude ab. Bleibt die Masse gleich, so ist nur noch der Reibungskoeffizient b für die Stärke der Dämpfung entscheidend.

Es gibt nun verschieden (Sonder-)Fälle die Gleichung (13) annehmen kann und die hier nun näher betrachtet werden sollen. Dazu überlegen wir uns nun, was für verschieden Werte des Reibungskoeffizienten b passiert:

- i. $\mathbf{b = 0} \rightarrow \omega = \omega_0$: Für den Fall, das die Reibung gegen null geht erhalten wir für die Kreisfrequenz ω die Eigenfrequenz ω_0 , also eine nahezu ungedämpfte harmonische Oszillation wie wir sie aus 2.1 schon kennen.
- ii. $\mathbf{(b/2m)^2 = \omega_0^2} \rightarrow \omega = 0$: Diesen Fall nennt man die so genannte „kritische Dämpfung“ oder auch aperiodischen Grenzfall. Dabei führt die Kugel gerade keine periodische Schwingung aus, sie kehrt lediglich in die Ausgangsposition zurück.
- iii. $\mathbf{(b/2m)^2 > \omega_0^2} \rightarrow \omega$ *imaginär*: Diesen Fall nennt man die „überkritische Dämpfung“ oder auch aperiodischer Fall oder Kriechfall. Auch in diesem Fall gibt es keine Schwingung, die Kugel kehrt in die Nulllage zurück - jedoch langsamer, also stärker gedämpft als in dem vorherigen Fall. Für den Fall $v(t=0) = 0$ gibt es keinen entscheidenden Unterschied zwischen den letzten beiden Fällen, einzig die Stärke der Dämpfung ist unterschiedlich, jedoch kehren beide ohne eine periodische Schwingung zu vollziehen in die Ausgangslage zurück. Haben wir jedoch den Fall $v(t=0) \neq 0$, so beschleunigen wir die Kugel beim Loslassen noch zusätzlich und es gibt die Möglichkeit, dass wie beim aperiodischen Grenzfall die Kugel einmal über die Ruhelage hinaus schwingt und erst danach auf einer exponentialen Kurve in die Ruhelage zurückkehrt. Bei der überkritischen Dämpfung findet dies dagegen nicht statt, hier kehrt die Kugel sofort in die Ruhelage zurück.
- iv. $\mathbf{0 < b < 2m\omega_0} \rightarrow \omega < \omega_0$: Der letzte Fall ist die häufigste und allgemeinste Möglichkeit: der so genannte Schwingfall. Sie führt eine Schwingung mit der Frequenz ω aus, die kleiner ist als die Eigenfrequenz ω_0 .

2.3. Erzwungene harmonische Schwingungen

Bisher haben wir nur betrachtet, was passiert, wenn wir die Kugel einmal auslenken und dann loslassen. Nun gibt es noch die Möglichkeit, die Feder ständig anzuregen, also das System einer periodischen, sich ändernden externen Kraft F_e auszusetzen (vgl. Abb. 4).

$$(14) \quad F_e = F_1 \cdot \sin(\omega_1 t)$$

F_1 sei dabei die Amplitude der externen Kraft und ω_1 ihre Kreisfrequenz. Das Vorzeichen wird so gewählt, dass die Kraft, die nach unten wirkt, positiv ist. Die nach oben wirkende Kraft in dementsprechend mit einem negativen Vorzeichen zu versehen.

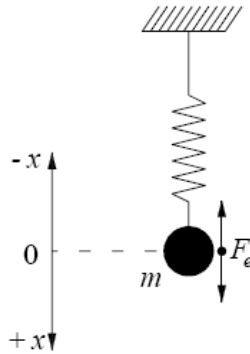


Abb. 4: Anregung eines Masse/Feder-Systems mit einer externen Kraft F_e

Damit erhält auch die Bewegungsgleichung eine neue Form:

$$(15) \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} = -Dx - b \frac{dx}{dt} + F_e$$

$$(16) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{D}{m} x = \frac{1}{m} F_1 \cdot \sin(\omega_1 t)$$

Wir können nun also erwarten, dass die Kugel nach dem Einschwingvorgang mit der gleichen Frequenz wie die anregende Kraft oszilliert. Wie wir jedoch schon wissen, tritt meist eine Phasenverschiebung φ auf. Wir erwarten zudem, dass die Amplitude der von außen angeregten Schwingung konstant ist, sobald der Einschwingvorgang beendet ist, da wir ständig dieselbe Energie in das System stecken. Deshalb verwenden wir nun folgenden Lösungsansatz für die Gleichung (16):

$$(17) \quad x = x_0 \cdot \sin(\omega_1 t + \phi)$$

Dabei sei φ die Phasenverschiebung zwischen der Auslenkung x und der externen Kraft F_e . Ist $\varphi < 0$, dann läuft die anregende Kraft der Auslenkung voraus. Wir setzen nun Gleichung (17) in Gleichung (16) ein und erhalten eine Lösung wenn für x_0 und φ gilt:

$$(18) \quad x_0 = \frac{\frac{F_1}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + \left(\frac{\omega_1 b}{m}\right)^2}}$$

$$(19) \quad \phi = \arctan\left(-\frac{\frac{\omega_1 b}{m}}{\omega_0^2 - \omega_1^2}\right) \quad \{-\pi \text{ für } \omega_1 > \omega_0\}$$

Wir diskutieren nun zunächst wieder verschiedene Fälle, diesmal für die Amplitude x_0 und Phasenverschiebung φ . Dabei ist nun aber der Unterschied zu beachten, dass diese beiden Größen nicht frei wählbar sind sondern abhängig von F_1 , ω_1 , m , D und b sind.

Anhand von Gleichung (18) können wir sehen, dass die Amplitude x_0 abhängig von der anregenden Frequenz ω_1 ist. Wir wollen uns nun die so genannte Amplituden-Resonanzkurve ansehen, indem wir x_0 über ω_1 auftragen. Abb. 5 zeigt solch eine Kurve:

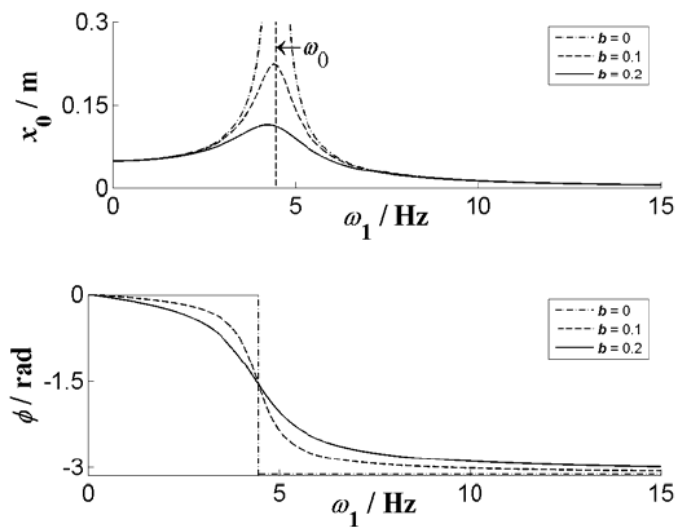


Abb. 5: Amplituden-Resonanz- und Phasenkurven für einen gedämpften harmonischen Oszillator

Rechnerisch finden wir das Maximum von x_0 unter der Bedingung $dx_0/d\omega_1 = 0$:

$$(20) \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{2m^2}} \quad \rightarrow x_0 \text{ max.}$$

Das Maximum der Amplitude wird also für $b = 0$ bei einem Wert erreicht, der kleiner ist als die Eigenfrequenz. Es gibt nun noch 3 Spezialfälle:

- i. Für $\omega_1 \ll \omega_0$ und wenn b sehr klein ist, dann gilt für die Amplitude $x_0 \approx F_1/D$. Eine Phasenverschiebung gibt es nicht. Die Kugel folgt sofort der anregenden Kraft.
- ii. Für $\omega_1 \approx \omega_0$ (der Resonanzfall) ist die Amplitude $x_0 \approx F_1/(\omega_0 b)$, also in diesem Falle abhängig von dem Reibungskoeffizienten. Je kleiner b desto größer x_0 . Bei $b \rightarrow 0$ gilt $x_0 \rightarrow \infty$. Die Phasenverschiebung φ liegt in diesem Fall bei 90° ($\varphi \approx -\pi/2$).
- iii. Für $\omega_1 \gg \omega_0$ gilt für die Amplitude $x_0 \approx F_1/(m\omega_1^2)$. Sie sinkt also mit steigender Anregerfrequenz. Die Phasenverschiebung φ beträgt nun 180° bzw. $-\pi$.

Anhand von Amplitudenresonanzkurven wie zum Beispiel in Abb. 5 kann man leicht das Dämpfungsverhalten eines beliebigen Feder-Masse-Systems ablesen. Manchmal reicht es aber auch, nur die eben besprochen Sonderfälle in Erinnerung zu rufen.

Zum Schluss wollen wir nun berechnen, bei welcher Frequenz der Energieübertrag maximal wird. Wir überlegen uns dazu den zeitlichen Verlauf der Geschwindigkeit, da wir daraus auf den Zeitpunkt der maximalen kinetischen Energie schließen können. Wir bilden nun die Ableitung des Ortes nach der Zeit. Dazu bedienen wir uns der Gleichung (17), die wir dann ableiten.

$$(21) \quad v = \frac{dx}{dt} = \omega_1 x_0 \cos(\omega_1 t + \phi) := v_0 \cos(\omega_1 t + \phi)$$

Setzen wir Gleichung (18) ein, erhalten wir:

$$(22) \quad v_0 = \omega_1 x_0 = \frac{\omega_1 F_1}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + \left(\frac{\omega_1 b}{m}\right)^2}} \quad \text{bzw.} \quad (23) \quad v_0 = \frac{F_1}{\sqrt{\left(m\omega_1^2 - \frac{D}{m}\right)^2 + b^2}}$$

v_0 wird nun genau dann maximal, wenn der Nenner der Gleichung (23) gegen Null geht.

$$(24) \quad \frac{D}{\omega_1} - m\omega_1 = 0 \quad v_0 = \text{max.}$$

Das bedeutet dann:

$$(25) \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{D}{m}} = \omega_0 \quad v_0 = \text{max.}$$

Die Geschwindigkeit und damit auch die kinetische Energie werden dann maximal, wenn das System mit seiner Eigenfrequenz angeregt wird. Dies nennt man den Energie-Resonanz-Fall. Es wird die maximale Energie des anregenden Systems auf das schwingende System übertragen. Typische Energie-Resonanzkurven für die Fälle $b = 0$ (rot), $b = b_1$ (grün) und $b = b_2$ (gelb) sehen wie folgt aus (vgl. Frage 3):

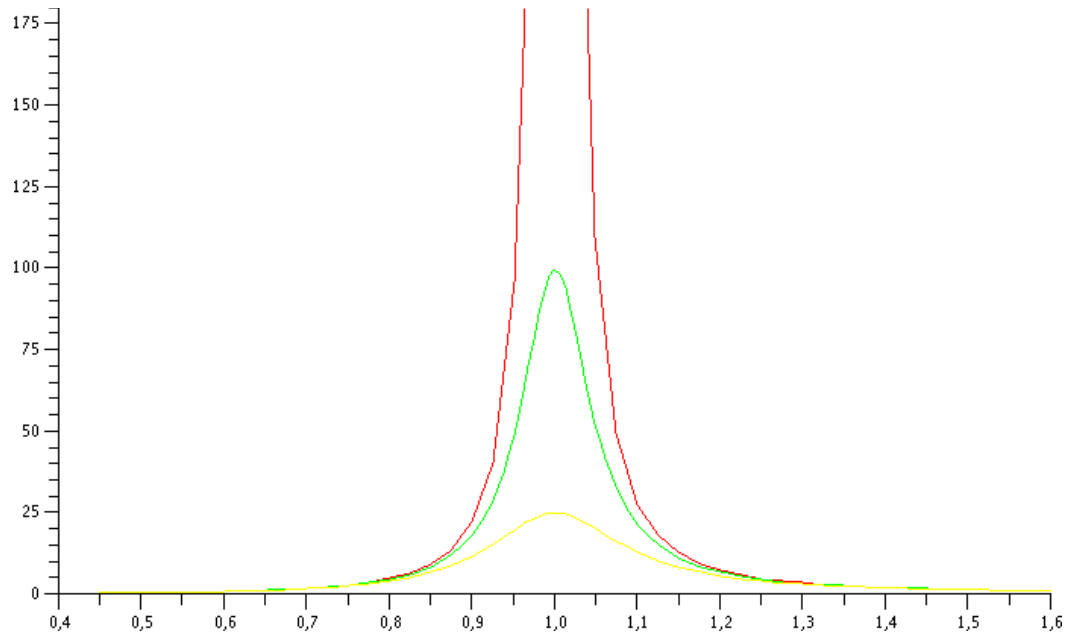


Abb. 6: Verschiedene Energie-Resonanzkurven zu Frage 3

3. Praktischer Teil

3.1. Beschreibung der Versuchsanordnung

Bei diesem Versuch betrachten wir die Schwingung einer Kugel, welche an einer Feder aufgehängt ist und in ein Becherglas mit Rizinus- bzw. Pflanzenöl taucht. Durch das Öl wird eine Dämpfung der Schwingung erreicht. Das Ziel des Versuches ist es, die Resonanzfrequenz der Schwingung für die beiden verschieden viskosen Ölsorten zu ermitteln.

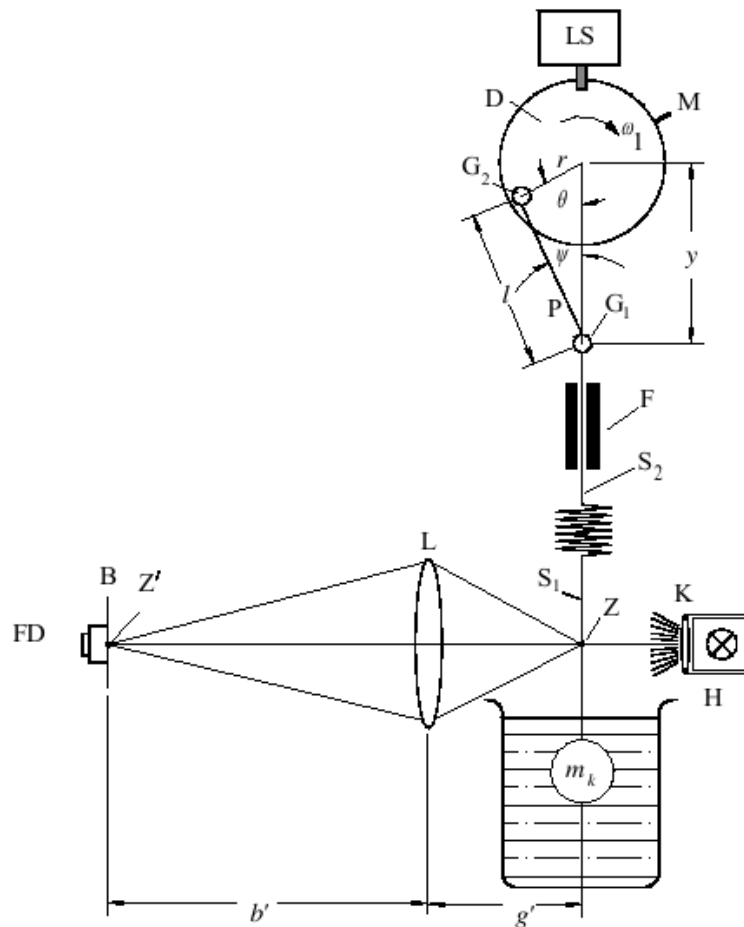


Abb. 7: Skizze des Versuchsanordnung

Wir wollen nun die Versuchsanordnung betrachten (vgl. Abb. 7): An der Stange S_1 , welche die Kugel mit der Feder verbindet, ist ein Zeiger Z angebracht. Dieser wird von einer Halogenlampe H beleuchtet. Das entstehende Schattenbild wird durch eine Linse L auf einen Beobachtungsschirm B abgebildet. Es entsteht ein vergrößertes Schattenbild Z' des Zeigers. Der Abstand zwischen Linse und Beobachtungsfläche beträgt circa zwei Meter. Dadurch ergibt sich eine Gegenstandsweite zwischen Zeiger und Linse von etwa 0,2 m. Die Lampe wird in einem Abstand von 30 cm vom Zeiger platziert. Lampe, Linse und Zeiger sollten sich auf gleicher Höhe befinden. Neben dem

Beobachtungsschirm befindet sich eine Fotodiode FD , welche das auf- und abwandernde Schattenbild des Zeigers registriert. Dabei wird die Fotodiode knapp über der unteren Extremposition des Schattenbilds positioniert. Das Signal der Diode wird auf den Eingang eines Digital-Oszilloskops gelegt.

Die Feder ist über eine weitere Stange S_2 mit einer Pleuelstange P der Länge l verbunden. Diese wiederum ist mit einer Drehscheibe D verbunden, welche mit Hilfe eines Antriebsmotors mit der Kreisfrequenz ω_1 in Rotation versetzt werden kann. Der Antriebsmotor wird mit einem Netzgerät betrieben und lässt sich über einen Drehzahlregler steuern. Durch diese Rotation kann die Kugel über die Feder in eine Schwingung versetzt werden. An der Drehscheibe ist ein Stift befestigt, der bei jedem Umlauf der Scheibe eine Lichtschranke LS auslöst. Die Lichtschranke ist mit einem elektrischem Universalzähler verbunden, welcher die Periodendauer T der Rotation der Drehscheibe misst. Das Signal der Lichtschranke wird zudem auf den zweiten Eingang des Oszilloskops gelegt.

Um die Amplitude der Schwingung der Kugel messen zu können, ist der mittlere Radius der Kugel mit einem Strich markiert. Neben dem Becherglas befindet sich ein Maßstab, an dem die Amplitude abgelesen werden kann. Dazu werden Kugel und Maßstab von einer CCD-Kamera aufgenommen und deren Signal an einen Fernseher geleitet. Dort können wir die Amplitude gut ablesen.

Um nun die Phasenverschiebung φ bestimmen zu können, benötigen wir den Zeitpunkt t_1 , an dem der Markierungsstift die Lichtschranke auslöst, die Zeit t_4 , an dem die Kugel ihre unterste Position erreicht, sowie die Periode T . Dann ergibt sich:

$$\phi = -\frac{t_4 - t_1}{T} 2\pi \quad \text{mit } T = \frac{2\pi}{\omega_1} \quad \text{und } t_4 = \frac{t_2 + t_3}{2}$$

Zur Bestimmung der Amplitude x_0 messen wir die minimale (x_2) und maximale (x_1) Auslenkung der Kugel auf dem Fernseher:

$$x_0 = \frac{x_1 - x_2}{2}$$

3.2. Versuchsdurchführung mit Rizinusöl

Wir beginnen nun die Versuchsführung mit einem mit Rizinusöl gefüllten Becherglas. Wir stellen den Antriebsmotor auf verschiedene Frequenzen zwischen 0 und 5 Hz ein. Dabei messen wir die Periodendauer T der Rotationsbewegung der Scheibe. Mit Hilfe von T können wir dann die Kreisfrequenz ω , berechnen:

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

Desweiterm bestimmen wir die Zeiten t_2 und t_3 , deren Signal durch den Zeigerschatten bei der Fotodiode ausgelöst und auf dem Oszilloskopschirm dargestellt wird. Wir bestimmen ebenfalls die Zeit t_4 , welche den Aufhängepunkt der Feder in der untersten Position darstellt. Aus den gemessenen Zeiten bestimmen wir dann die Phasenverschiebung φ . Dabei haben wir folgende Ergebnisse erzielt:

T / s	ω_1 / rad s⁻¹	x_1 / m	x_2 / m	x_0 / m	t_1 / s	t_2 / s	t_3 / s	t_4 / s	φ / rad
7,697	0,816	0,508	0,494	0,007	0,08	-0,44	0,71	0,135	-0,04
4,908	1,280	0,509	0,495	0,007	0,12	-0,21	0,52	0,155	-0,04
3,293	1,908	0,509	0,494	0,008	0,10	-0,14	0,41	0,135	-0,07
2,824	2,225	0,509	0,494	0,008	0,09	-0,10	0,35	0,125	-0,08
2,329	2,698	0,509	0,494	0,008	0,10	-0,07	0,31	0,120	-0,05
1,989	3,159	0,510	0,494	0,008	0,08	-0,05	0,30	0,125	-0,14
1,726	3,640	0,510	0,493	0,009	0,07	-0,04	0,29	0,125	-0,20
1,361	4,617	0,510	0,493	0,009	0,07	-0,04	0,26	0,110	-0,18
1,125	5,585	0,511	0,492	0,010	0,06	-0,02	0,26	0,120	-0,34
0,929	6,763	0,512	0,490	0,011	0,06	-0,03	0,26	0,115	-0,37
0,829	7,579	0,514	0,488	0,013	0,03	-0,02	0,25	0,115	-0,64
0,784	8,014	0,515	0,487	0,014	0,04	-0,02	0,25	0,115	-0,60
0,731	8,595	0,516	0,485	0,016	0,02	-0,03	0,26	0,115	-0,82
0,697	9,015	0,518	0,484	0,017	0,01	-0,01	0,24	0,115	-0,95
0,662	9,491	0,518	0,484	0,017	-0,02	-0,02	0,24	0,110	-1,23
0,629	9,989	0,518	0,484	0,017	-0,03	-0,02	0,21	0,095	-1,25
0,516	12,177	0,513	0,490	0,012	0,11	-0,03	0,15	0,060	-2,07

Tab. 1: Messwerte für den Versuch mit Rizinusöl

Nun tragen wir x_0 über ω_1 und φ über ω_1 auf und zeichnen in die Diagramme per Hand eine Ausgleichskurve ein. Für die einzuzeichnenden Fehlerbalken schätzen wir folgende Ablesegenauigkeiten:

- x_1 und x_2 sind durch die Ablesegenauigkeit des Zollstocks begrenzt. Diese beträgt $\pm 0,001\text{m}$. Da sich x_0 als Mittelwert aus x_1 und x_2 berechnet, gilt auch hier ein Fehler von $\pm 0,001\text{m}$.
- Der Fehler von φ hängt von den Ablesegenauigkeiten von t_1 , t_4 und T ab. Da die Periodendauer T mit dem Universalzähler auf mehr als zehn Nachkommastellen genau abgelesen werden kann, ignorieren wir deren Fehler. Es gilt dann nach der Fehlerfortpflanzung des Größtfehlers:

$$\Delta\phi = \left| \frac{2\pi}{T} \right| \Delta t_1 + \left| \frac{-2\pi}{T} \right| \Delta t_4$$

Da $\Delta t_1 = \Delta t_4 := \Delta t$, gilt:

$$\Delta\phi = 2 \cdot \left| \frac{2\pi}{T} \right| \Delta t$$

Der Fehler für φ hängt also von der Periodendauer T ab. Für Δt wählen wir einen Wert von 0,01s, da der Cursor des Digital-Speicheroszilloskops auf 10ms genau einstellbar ist. Wir berechnen dann für jeden Messwert von T den Fehler und zeichnen diesen als Fehlerbalken in das Diagramm ein.

T / s	7,697	4,908	3,293	2,824	2,329	1,989	1,726	1,361
φ / rad	-0,04	-0,04	-0,07	-0,08	-0,05	-0,14	-0,20	-0,18
$\Delta\varphi$ / rad	0,016	0,026	0,038	0,044	0,054	0,063	0,073	0,092

T / s	1,125	0,929	0,829	0,784	0,731	0,697	0,662	0,629	0,516
φ / rad	-0,34	-0,37	-0,64	-0,60	-0,82	-0,95	-1,23	-1,25	-2,07
$\Delta\varphi$ / rad	0,122	0,135	0,152	0,160	0,172	0,180	0,190	0,200	0,244

Tab. 2: Berechnung der Größtfehler für φ für den Versuch mit Rizinusöl

Nun können wir die Diagramme zeichnen. Leider haben wir für die zweite Hälfte der Kurven ab circa 12 rad/s keine aufwertbaren Messwerte erhalten. Daher zeichnen wir die Diagramme ab diesen Punkten gestrichelt gemäß unserer Erwartung weiter.

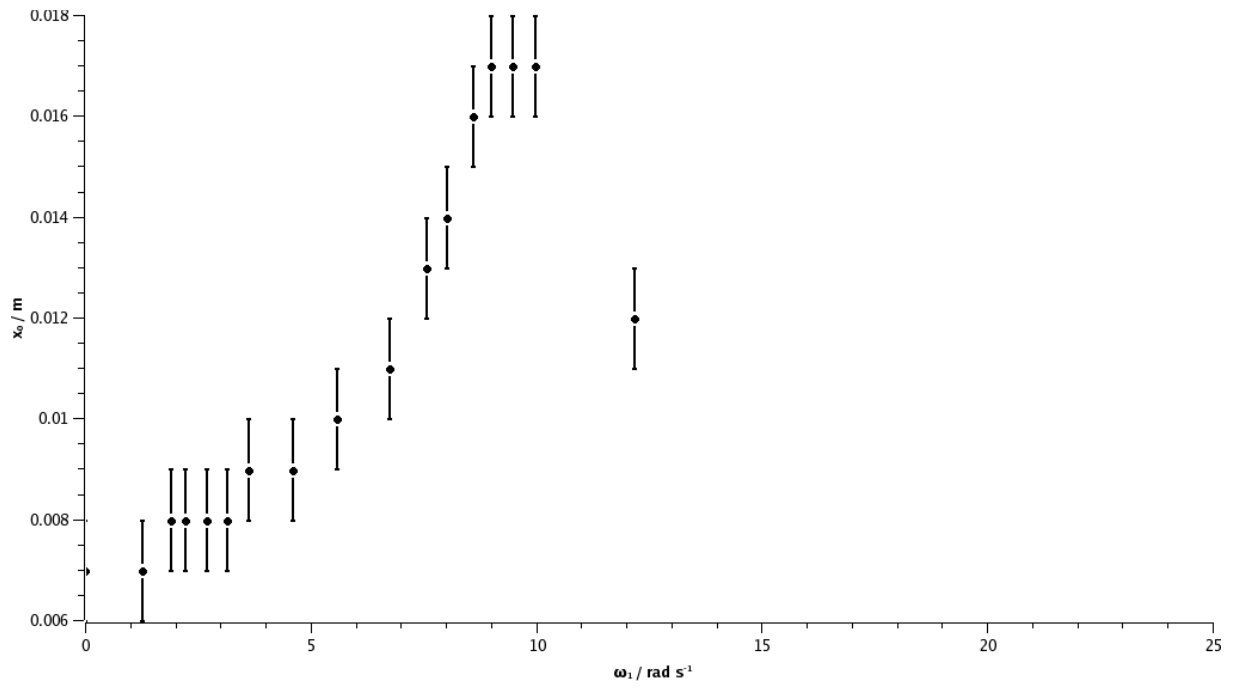


Abb. 8: Amplitude x_0 über Kreisfrequenz ω_1 für den Versuch mit Rizinusöl

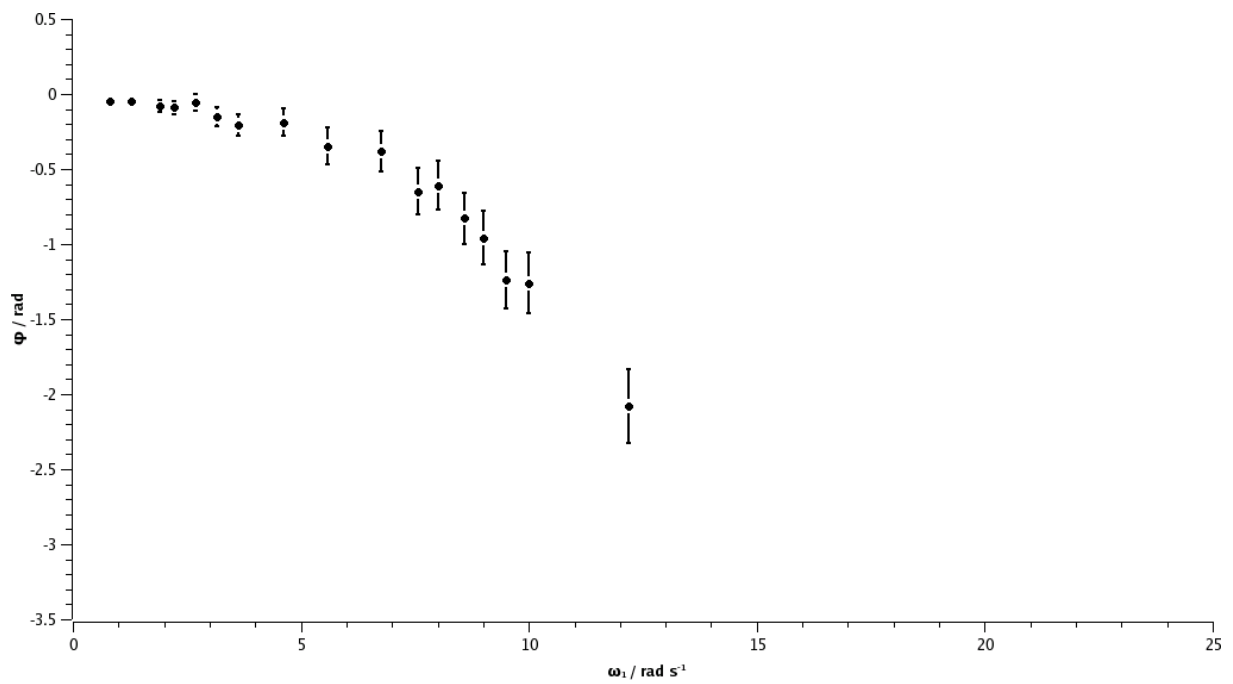


Abb. 9: Phasenverschiebung φ über Kreisfrequenz ω_1 für den Versuch mit Rizinusöl

3.3. Versuchsdurchführung mit Pflanzenöl

Wir führen nun den gleichen Versuch wie oben beschrieben mit Pflanzenöl zur Dämpfung der Schwingung durch. Dabei haben wir folgende Ergebnisse erzielt:

T / s	$\omega_1 / \text{rad s}^{-1}$	x_1 / m	x_2 / m	x_0 / m	t_1 / s	t_2 / s	t_3 / s	t_4 / s	φ / rad
7,658	0,820	0,508	0,495	0,007	-0,03	-0,66	0,51	-0,075	0,037
2,321	2,707	0,509	0,494	0,008	0,12	-0,09	0,29	0,100	0,054
1,359	4,623	0,511	0,492	0,010	0,10	-0,03	0,28	0,125	-0,116
0,958	6,559	0,513	0,489	0,012	0,12	-0,03	0,28	0,125	-0,033
0,737	8,525	0,521	0,481	0,020	0,11	-0,02	0,27	0,125	-0,128
0,675	9,308	0,530	0,471	0,030	0,10	-0,01	0,27	0,130	-0,279
0,649	9,681	0,550	0,460	0,045	0,07	0	0,27	0,135	-0,629
0,525	11,968	0,527	0,475	0,026	0,18	-0,02	0,30	0,140	0,479

Tab. 3: Messwerte für den Versuch mit Pflanzenöl

Als Fehler für die Längenangaben x_1 , x_2 und x_0 nehmen wir wieder $\pm 0,001\text{m}$ an. Für den Fehler von φ führen wir wie oben eine Fehlerberechnung in Abhängigkeit von T durch und erhalten:

T / s	7,658	2,321	1,359	0,958	0,737	0,675	0,649	0,525
φ / rad	0,037	0,054	-0,116	-0,033	-0,128	-0,279	-0,629	0,479
$\Delta\varphi / \text{rad}$	0,016	0,054	0,092	0,131	0,171	0,186	0,194	0,239

Tab. 4: Berechnung der Größtfehler für φ für den Versuch mit Pflanzenöl

Nun können wir die Diagramme für x_0 über ω_1 und φ über ω_1 zeichnen. Dabei wurde auch hier aufgrund eines Mangels an Messwerten ab einen bestimmten Punkt die erwartete Kurve gestrichelt eingezeichnet. Anmerkung: Der letzte Wert für φ ist offensichtlich fehlerhaft und wird daher nicht für die Ausgleichskurve berücksichtigt.

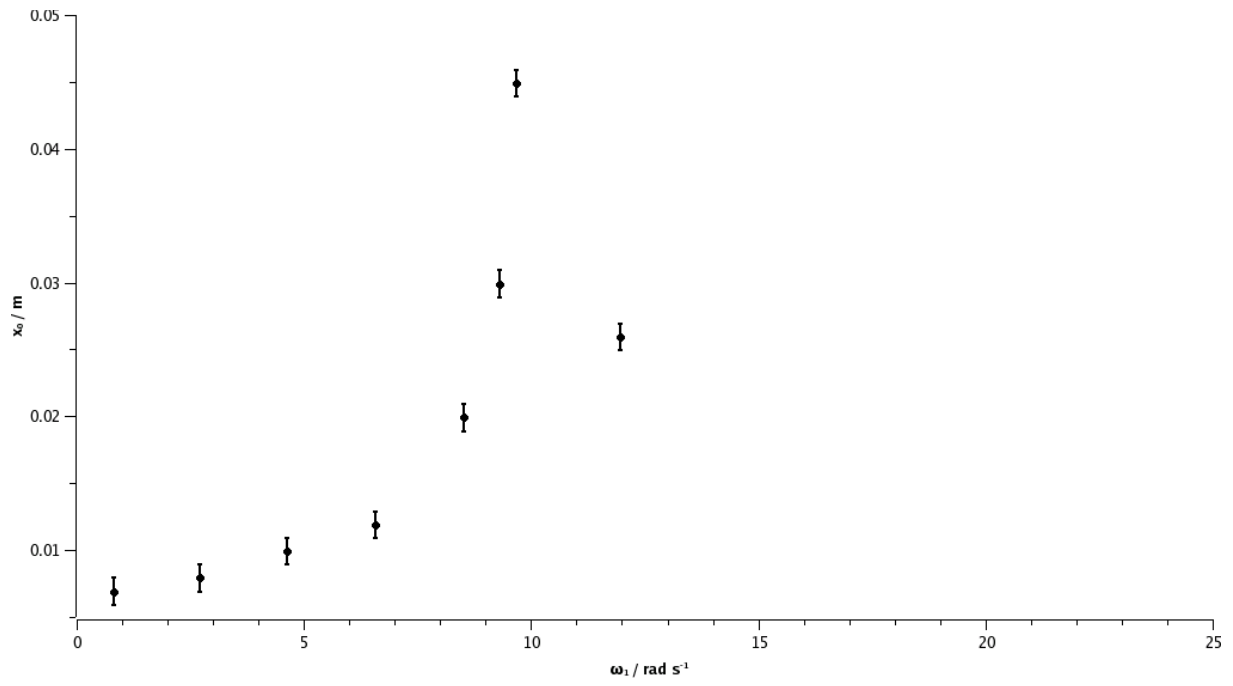


Abb. 10: Amplitude x_0 über Kreisfrequenz ω_1 für den Versuch mit Pflanzenöl

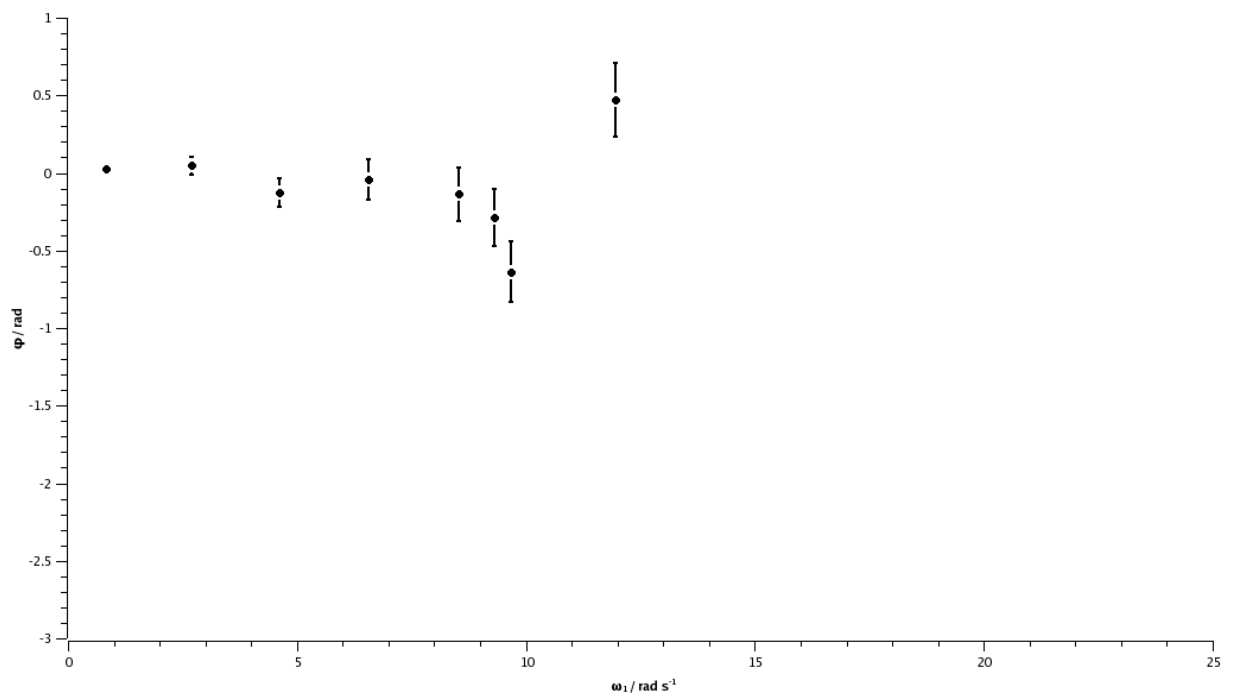


Abb. 11: Phasenverschiebung φ über Kreisfrequenz ω_1 für den Versuch mit Pflanzenöl

3.4. Auswertung

Aufgrund der unvollständigen Diagramme aus unseren Messwerten kann die Auswertung nur sporadisch erfolgen. Das Maximum der Amplitude x_0 liegt für beide Ölsorten ungefähr bei 10 rad/s. Die Wendestellen der Diagramme für die Phasenverschiebung φ lassen sich nur schwer bestimmen und liegen schätzungsweise im Bereich von 10 bis 12 rad/s und damit in einem ähnlichen Bereich wie beim x_0 -Diagramm. Daher können wir als Messergebnis festhalten, dass die Resonanzfrequenz für beide Ölsorten bei etwa 10 bis 12 rad/s liegt.

Der Verlauf der Kurven entspricht in etwa den Erwartungen gemäß Abb. 5, wobei allerdings wie angesprochen ein Teil der Kurven fehlt. Da die Kurve für die Amplitude x_0 beim Pflanzenöl steiler ansteigt und rascher wieder abfällt als beim Rizinusöl, ist davon auszugehen, dass der Dämpfungsfaktor b beim Pflanzenöl kleiner ist und somit weniger Energie benötigt wird, um die Kugel in Schwingung zu versetzen.

3.5. Vergleich der Messwerte mit den Erwartungswerten

Wir wollen nun unsere Messwerte mit dem theoretisch zu erwartenden Wert vergleichen. Dazu verwenden wir folgende Gleichung:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} \quad \text{mit } m := m_K + \frac{1}{3}m_F$$

Die folgenden Werte sind bekannt:

- $D = \text{Federkonstante} = 22,7 \pm 0,5 \text{ kg/s}^2$
- $m_K = \text{Masse der Kugel} = 0,17 \text{ kg} \pm 0,002 \text{ kg}$
- $m_F = \text{Masse der Feder} = 0,057 \pm 0,002 \text{ kg}$

Nun bestimmen wir ω_0 :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{22,7 \text{ kg/s}^2}{(0,17 \text{ kg} + \frac{1}{3}0,057 \text{ kg})}} = 10,96 \text{ s}^{-1}$$

Zur Fehlerangabe für ω_0 führen wir eine Größtfehlerberechnung der Fehlerfortpflanzung durch:

$$\Delta m = \Delta m_K + \frac{1}{3} \Delta m_F = 0,002 \text{ kg} + \frac{1}{3} 0,002 \text{ kg} = 0,003 \text{ kg}$$

$$\Delta \omega_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{D}{m}}} \Delta D + \frac{1}{2} \cdot \frac{D}{\sqrt{\frac{D}{m}} m^2} \Delta m = 0,21 \text{ s}^{-1}$$

Somit liegt der Theoriewert von ω_0 bei $10,96 \text{ s}^{-1} \pm 0,21 \text{ s}^{-1}$. Er stimmt damit grob mit dem von uns grafisch ermittelten Wert aus dem Versuch überein.

4. Anhang

4.1. Literatur

- [1] Skript zum Anfängerpraktikum Physik I, CvO Universität Oldenburg, Institut für Physik, Oktober 2005
- [2] dtv-Atlas Physik, Band 1, Deutscher Taschenbuch Verlag, 7. Auflage, August 2004
- [3] http://de.wikipedia.org/wiki/Harmonischer_Oszillator
- [4] http://de.wikipedia.org/wiki/Harmonische_Schwingung

4.2. Abbildungsnachweis

- **Abb. 1:**
http://www.physik.uni-oldenburg.de/Docs/praktika/APR/pdf/Mechanische_Schwingung.pdf
- **Abb. 2:**
http://www.physik.uni-oldenburg.de/Docs/praktika/APR/pdf/Mechanische_Schwingung.pdf
- **Abb. 3:**
http://www.physik.uni-oldenburg.de/Docs/praktika/APR/pdf/Mechanische_Schwingung.pdf
- **Abb. 4:**
http://www.physik.uni-oldenburg.de/Docs/praktika/APR/pdf/Mechanische_Schwingung.pdf
- **Abb. 5:**
http://www.physik.uni-oldenburg.de/Docs/praktika/APR/pdf/Mechanische_Schwingung.pdf
- **Abb. 7:**
http://www.physik.uni-oldenburg.de/Docs/praktika/APR/pdf/Mechanische_Schwingung.pdf