

PROTOKOLL ZUM ANFÄNGERPRAKTIKUM PHYSIK

Trägheitsmoment und Steinerscher Satz

Sebastian Finkel
Sebastian Wilken

Versuchsdurchführung:
14. Dezember 2005

0. Inhalt

1. Einleitung

2. Theoretischer Teil

2.1. Bestimmung von Trägheitsmomenten mit einem Drehtisch

2.2. Bestimmung der Schwerpunktachse eines Körpers

3. Praktischer Teil

3.1. Trägheitsmoment einer Kreisscheibe

3.2. Bestimmung der Lage einer Schwerpunktachse eines unregelmäßig geformten Körpers

4. Anhang

4.1. Literatur

4.2. Abbildungsnachweis

5. Anlage

1. Einleitung

Mit Hilfe dieses Versuches soll die Analogie zwischen Translations- und Rotationsbewegung vertieft werden. Dazu beschäftigen wir uns mit dem Trägheitsmoment, dem Äquivalent zur Masse bei der Rotationsbewegung. Wir werden das Trägheitsmoment einer Kreisscheibe mit Hilfe eines Drehtisches ermitteln und die Schwerpunktschwerachse eines unregelmäßig geformten Probekörpers bestimmen.

2. Theoretischer Teil

2.1. Bestimmung von Trägheitsmomenten mit einem Drehtisch

Um die Analogie zwischen Translations- und Rotationsbewegung zu verdeutlichen, bedienen wir uns eines Versuchsaufbaus, wie er in Abb. 1 dargestellt ist. Wir haben einen Drehtisch D mit dem Radius r , der sich um die Drehachse H bewegt und dabei die Winkelgeschwindigkeit ω hat. An diesem Drehtisch ist ein Faden so befestigt, dass er über einer Umlenkrolle U von der Masse m um die Länge l gezogen werden kann. Damit sich die Scheibe nicht unkontrolliert losbewegt, ist der Haltemagnet B angebracht.

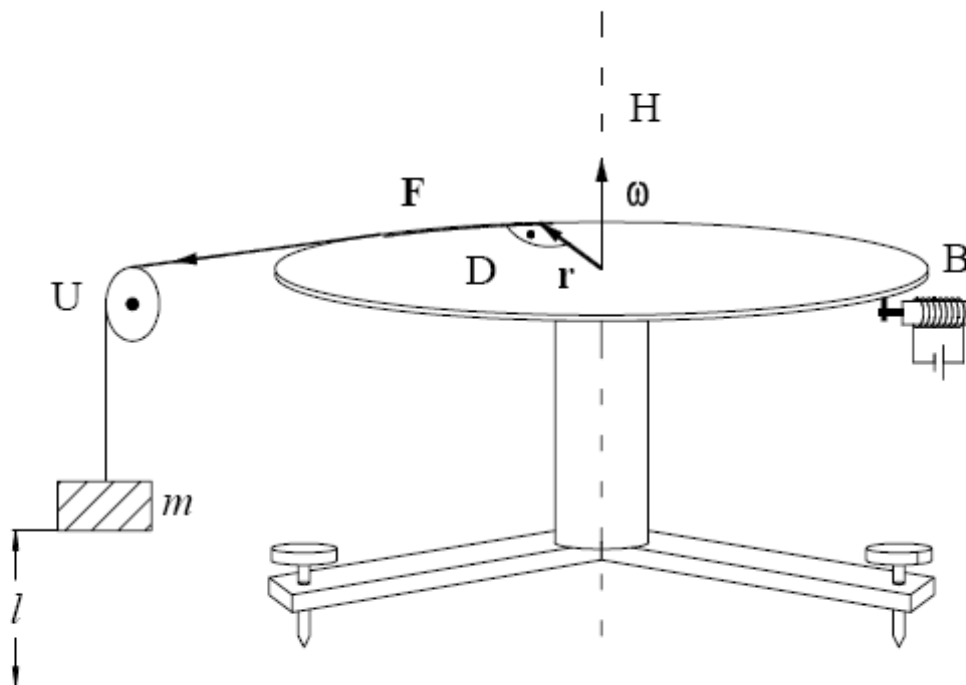


Abb. 1: Drehtisch zur Bestimmung von Trägheitsmomenten

Wir stellen zunächst eine Bewegungsgleichung für die Rotationsbewegung auf, um dann aus messbaren oder bekannten Größen das Trägheitsmoment I_d bestimmen zu können. Für das Drehmoment, das der Tisch mit der Beschleunigung $d\omega/dt$ erfährt, gilt: $M = r \times F$. Erstellen wir nun analog zu $F = ma$ eine Bewegungsgleichung, erhalten wir:

$$(1) \quad M = r \times F = I_d \cdot \frac{d\omega}{dt}$$

Wegen gilt $r \perp F$ gilt für die Beträge nun einfach:

$$(2) \quad F = \frac{I_d}{r} \frac{d\omega}{dt}$$

Da von den bisherigen Größen dieser Gleichung nur der Radius r messbar oder bekannt ist, müssen wir nun noch die Größen F und $d\omega/dt$ ersetzen. Wir überlegen uns dazu wieder eine Analogie, dieses Mal zur Beschleunigung und erhalten dann für eine Masse m , die wie oben in der Skizze gezeigt in der Zeit t auf der Strecke l eine Beschleunigung erfährt:

$$(3) \quad l = \frac{1}{2} at^2 \Leftrightarrow a = \frac{2l}{t^2}$$

Da der Faden nun über die Umlenkrolle mit dem Drehtisch verbunden ist, muss die Tangentialbeschleunigung am Rand der Drehscheibe auch durch Formel (3) gegeben sein. Mit dem bekannten Zusammenhang von Winkel- und Tangentialbeschleunigung ergibt sich dann für die Beschleunigung:

$$(4) \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{a}{r} = \frac{2l}{r \cdot t^2}$$

Setzt man dies nun in Gleichung (2) ein, erhält man einen Ausdruck, bei dem wir nun noch die Kraft F als unbekannte Größe eliminieren müssen:

$$(5) \quad F = I_d \frac{2l}{r^2 t^2}$$

Wir wollen nun einen Ausdruck für die Kraft F finden. Dazu müssen wir uns erst einmal überlegen, welche Kräfte in unserer Versuchsanordnung bei der Durchführung eine Rolle spielen. Wir wissen, dass die Gewichtskraft $G = mg$ als maßgebende Kraft auf das System wirkt und die

Masse m mit der Kraft F_m beschleunigt. Daneben wirken allerdings noch die Reibungskräfte an der Umlenkrolle F_{ru} und am Drehtisch F_{rd} dieser Kraft entgegen. Weiterhin müssen auch der Drehtisch und die Umlenkrolle beschleunigt werden, so dass sich für unsere Kraft F folgender Zusammenhang ergibt:

$$(6) \quad F = G - (F_m + F_{ru} + F_u + F_{rd})$$

- F_u = Beschleunigungskraft für die Umlenkrolle
- F = Beschleunigungskraft für den Drehtisch

Man sieht nun schnell, dass nur ein gewisser Teil der Gesamtkraft G als beschleunigende Kraft $F_m = ma$ auf die Masse m wirkt. Um jedoch zu großen Aufwand zu vermeiden, vereinfacht man die Reibungs- und Beschleunigungskraft an der Umlenkrolle zu einer Kraft. Man geht einfach von einer Translationsbeschleunigung mit der Ersatzmasse m_e aus:

$$(7) \quad F_{ru} + F_u := m_e a$$

Damit folgt für F :

$$(8) \quad F = m \cdot g - (m + m_e)a - F_{rd}$$

Setzen wir Gleichung (5) ein, erhalten wir:

$$(9) \quad m \cdot g - (m + m_e)a = I_d \frac{2l}{r^2 t^2} + F_{rd}$$

Zu Vereinfachung führen wir für die linke Seite der Gleichung eine Kraft F_1 ein. Nun ergibt sich:

$$(10) \quad F_1 = I_d \frac{2l}{r^2 t^2} + F_{rd}$$

Nun besteht die Gleichung bis auf F_{rd} nur noch aus messbaren oder bekannten Größen. Wir gehen jetzt davon aus, dass wir am Drehtisch nur eine geschwindigkeitsunabhängige *Coulomb*-Reibung haben, die nur von der Masse des Drehstisches und der aufgelegten Masse abhängt. So kann man F_{rd} als eine zeitunabhängige Konstante betrachten und vereinfacht hat unsere Gleichung (10) dann die Form einer Geradengleichung:

$$(11) \quad y = mx + b \quad \text{mit: } y = F_1, \quad x = \frac{2l}{r^2 t^2}, \quad m = I_d, \quad b = F_{rd}$$

Nun können wir die Funktion in einem Graphen darstellen und erhalten durch Ermittlung der Steigung einen Wert für I_d .

Wir wollen nun den Fall betrachten, dass auf den Drehtisch ein zusätzlicher Körper mit der Masse m_k und dem zusätzlichen Drehmoment I_k gelegt wird. Fallen Schwerpunktsache S des Körpers mit der Drehachse des Tisches zusammen, ist das Gesamtträgheitsmoment gegeben durch:

$$(12) \quad I = I_d + I_k$$

Für den Fall, dass jedoch die Achsen S und H um den Abstand s parallel verschoben sind, gilt nach dem *STEINER*schen Satz:

$$(13) \quad I = I_d + I_k + m_k s^2$$

Daraus folgt dann für Gleichung (10):

$$(14) \quad F_1 = I \frac{2l}{r^2 t^2} + F_{rd}$$

Gleichung (13) eingesetzt, nach I umgestellt und gekürzt ergibt dann:

$$(15) \quad I = (F_1 - F_{rd}) \frac{r^2}{2l} t^2 = (mg - F_{rd}) \frac{r^2}{2l} t^2 - (m + m_e) r^2$$

2.2. Bestimmung der Schwerpunktsache eines Körpers

Wir nutzen nun unser Wissen, dass I minimal wird, wenn $s = 0$ ist, also wenn Schwerpunktsache des aufgelegten Körpers und die Drehachse des Tisches zusammenfallen, um die Schwerpunktsache eines unregelmäßig geformten Probekörpers bestimmen zu können. Da m , l , r und F_{rd} Konstanten sind, erhalten wir genau dann ein Minimum, wenn t bzw. t^2 minimal ist. Wir suchen also eine Position, beschrieben durch die Verschiebung s , bei der die Fallzeit t minimal ist. Dazu setzen wir nun Formel (13) in Gleichung (14) und erhalten aufgelöst nach t^2 eine Funktion von s :

$$(16) \quad t^2 = \frac{(I_d + I_k)2l}{(F_1 - F_{rd})r^2} + \frac{2lm_k}{(F_1 - F_{rd})r^2} \cdot s^2$$

Um diesen Term übersichtlicher zu gestalten, ersetzen wir jeweils die Brüche durch Platzhalter:

$$(17) \quad t^2 = K_1 + K_2 \cdot s^2$$

Diese Gleichung lässt sich auch wie folgt als quadratische Gleichung schreiben:

$$K_1 + K_2 s^2 - t^2 = 0$$

Wir haben es also mit einer Kegelschnittfunktion zu tun. Für $K_1 = K_2 = 1$ sieht eine derartige Funktion zum Beispiel so aus (vgl. Frage 1):

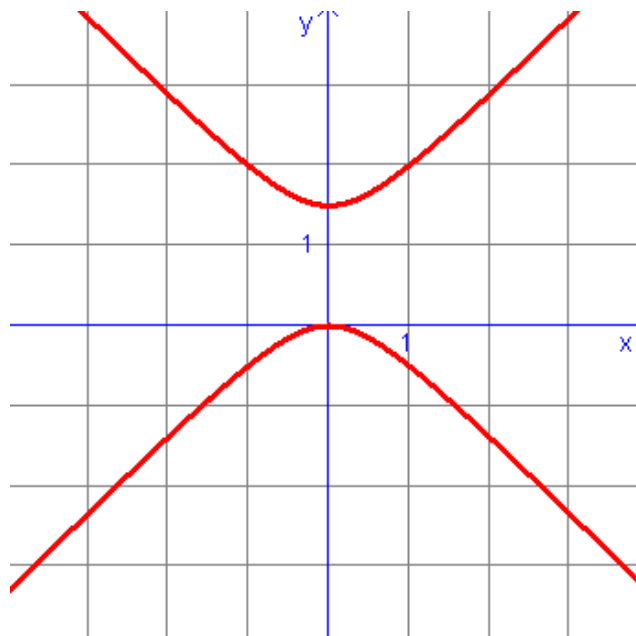


Abb. 2: Kegelschnitt-Funktion

Nun müssen wir die gesuchte Schwerpunktschwerachse noch experimentell bestimmen. Dazu legen wir auf der Drehscheibe ein X-Y-Koordinatensystem an. Den Ursprung legen wir in die Drehachse des Drehstisches. Entlang der Y-Achse versehen wir den Tisch mit Löchern, so dass wir die aufliegende Masse, die einen passenden Haltestift besitzt, an jedem Punkt P mit festgelegtem Abstand zum Ursprung anbringen können. So verhindern wir, dass wir die Orientierung bezüglich des Koordinatensystems ändern und gewährleisten, dass die Masse nur in y -Richtung verschoben werden kann.

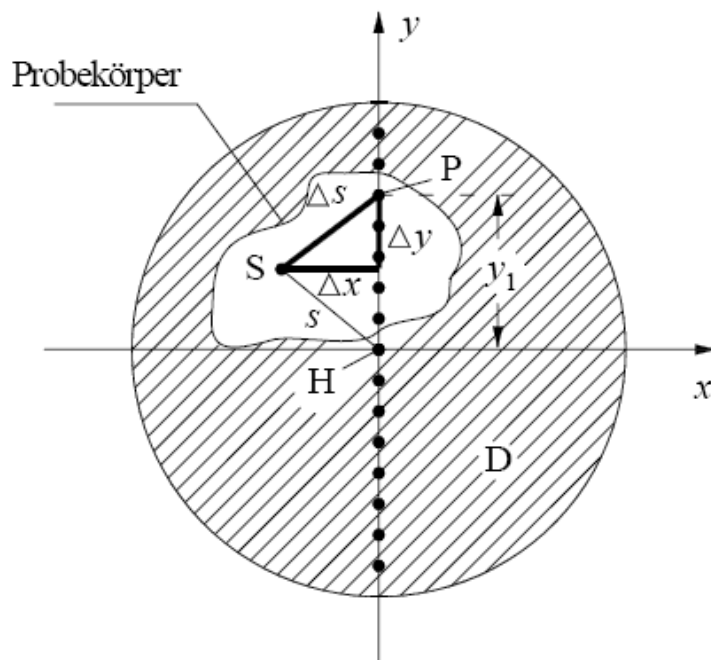


Abb. 3: Unregelmäßig geformter Probekörper am Drehtisch

Der Abstand des Punktes P des Stiftes zum Schwerpunkt S sei gegeben durch:

$$(18) \quad \Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

Für ein beliebiges Loch auf der y -Achse folgt dann für den Abstand s des Schwerpunktes S von der Drehachse H :

$$(19) \quad s = \sqrt{\Delta x^2 + (y_1 - \Delta y)^2}$$

Wir wissen, dass die Fallzeit t der Masse m genau dann ein Minimum annimmt, wenn s minimal wird. Dies geschieht genau dann, wenn $y_1 = \Delta y$, da Δx bei unserer Anordnung fest ist.

Verschieben wir nun den Körper in y -Richtung auf dem Drehtisch, können wir durch Messen der Fallzeit t und der Verschiebung y_1 einen Wert für Δy bestimmen, indem wir t über y_1 auftragen. Analog ließe sich auch Δx bestimmen.

3. Praktischer Teil

3.1. Trägheitsmoment einer Kreisscheibe

Bevor wir mit den Messungen mit der Kreisscheibe beginnen, muss das Trägheitsmoment des leeren Drehtisches bestimmt werden. Dazu bestimmen wir für fünf unterschiedliche Beschleunigungsgewichte die Fallstrecke l und dreimal die Fallzeit t . Aus den drei Fallzeiten bilden wir dann den Mittelwert. Für die Messung der Fallzeit verwenden wir einen elektrischen Universalzähler, welcher von dem Impuls gestartet wird, der den Drehtisch aus seiner Halteposition loslässt. Der Stoppimpuls wird von einer Lichtschranke geliefert, welche von den Beschleunigungsgewichten durchfallen wird. Dabei haben wir folgende Ergebnisse erhalten:

- Radius r des Drehtisches: $0,075\text{m} \pm 0,0001\text{m}$

Vers.	Gewicht 1 $m_1 = 0,00602\text{kg}$ $l_1 = 0,378\text{m}$	Gewicht 2 $m_2 = 0,004951\text{kg}$ $l_2 = 0,382\text{m}$	Gewicht 3 $m_3 = 0,003886\text{kg}$ $l_3 = 0,389\text{m}$	Gewicht 4 $m_4 = 0,00298\text{kg}$ $l_4 = 0,397\text{m}$	Gewicht 5 $m_5 = 0,001981\text{kg}$ $l_5 = 0,401\text{m}$
1	1,3928s	1,5545s	1,7955s	2,1144s	2,7261s
2	1,3895s	1,5568s	1,7929s	2,0980s	2,7349s
3	1,3874s	1,5583s	1,7934s	2,1115s	2,7178s
\bar{t}	1,3899s	1,5565s	1,7939s	2,108s	2,7263s

Tab. 1: Messergebnisse für Versuch 3.1 ohne zusätzliche Messingscheibe

- Fehler bei der Bestimmung der Massen: $\pm 0,000001\text{kg}$
- Fehler bei der Bestimmung der Fallstrecken: $\pm 0,001\text{m}$
- Fehler bei der Bestimmung der Fallzeiten: $\pm 0,0001\text{s}$

Nun können wir die Messingscheibe zentral auf den Drehteller legen und analog zu den Messungen ohne Messingscheibe drei Versuchsdurchläufe je Gewicht durchführen. Dabei erhielten wir folgende Messergebnisse:

- Masse m der Messingscheibe: $0,202129\text{kg} \pm 0,000001\text{kg}$
- Radius r der Messingscheibe: $0,03\text{m} \pm 0,001\text{m}$

Vers.	Gewicht 1 $m_1 = 0,00602\text{kg}$ $l_1 = 0,376\text{m}$	Gewicht 2 $m_2 = 0,004951\text{kg}$ $l_2 = 0,381\text{m}$	Gewicht 3 $m_3 = 0,003886\text{kg}$ $l_3 = 0,387\text{m}$	Gewicht 4 $m_4 = 0,00298\text{kg}$ $l_4 = 0,392\text{m}$	Gewicht 5 $m_5 = 0,001981\text{kg}$ $l_5 = 0,401\text{m}$
1	1,4759s	1,6459s	1,9075s	2,2234s	2,9013s
2	1,4764s	1,6490s	1,9035s	2,2283s	2,9139s
3	1,4717s	1,6491s	1,8962s	2,2241s	2,8821s
\bar{t}	1,4747s	1,648s	1,9024s	2,2253s	2,8991s

Tab. 2: Messergebnisse für Versuch 3.1 mit zusätzlicher Messingscheibe

Nun tragen wir die Messergebnisse in ein Diagramm ein. Dazu berechnen wir F_1 und $2l/(t^2)$ und tragen beide Größen gegeneinander auf. Die Steigung der sich ergebenden Ausgleichsgeraden ist gleich den gesuchten Trägheitsmomenten I_d und I . Zur Berechnung der Kraft F_1 verwenden wir folgende Formel:

$$F_1 = m \cdot g - (m + m_e) \cdot a$$

Für m setzen wir die Beschleunigungsmasse des jeweiligen Versuchs ein. Für g wählen wir die Erdbeschleunigung in Bremen von $9,81341 \text{ m/s}^2$. Die Ersatzmasse m_e hat hier einen Wert von ca. $2,2\text{g}$ bzw. $0,0022\text{kg}$. Die Beschleunigung a wird wie folgt bestimmt:

$$a = \frac{2 \cdot l}{t^2}$$

Nun können wir für beide Versuchsteile Wertetabellen für F_1 und $2l/(t^2)$ berechnen:

Ohne Messingscheibe

$2l/(t^2)$ im $1/\text{m s}^2$	F_1 in N
19,182471	0,018982
31,765578	0,028308
42,979426	0,036650
56,062516	0,046314
69,571627	0,055839

Tab. 3: Wertetabellen für die Messungen ohne zusätzliche Messingscheibe

Mit Messingscheibe

$2l/(t^2)$ im $1/\text{m s}^2$	F_1 in N
16,963890	0,056214
28,145982	0,046563
38,020232	0,036820
49,879034	0,028414
61,473502	0,019035

Tab. 4: Wertetabellen für die Messungen mit zusätzlicher Messingscheibe

Nun zeichnen wir das Diagramm. Dabei entsteht eine Gerade der Form $y = ax + b$. Die Steigung a der Geraden entspricht dem gesuchten Trägheitsmoment. Der y-Achsenabschnitt b entspricht den Reibungskräften F_{rd} am Drehtisch. Trägt man die Graphen für den Versuch mit und ohne zusätzliche Messingscheibe in ein Diagramm ein, erhält man folgendes Bild:

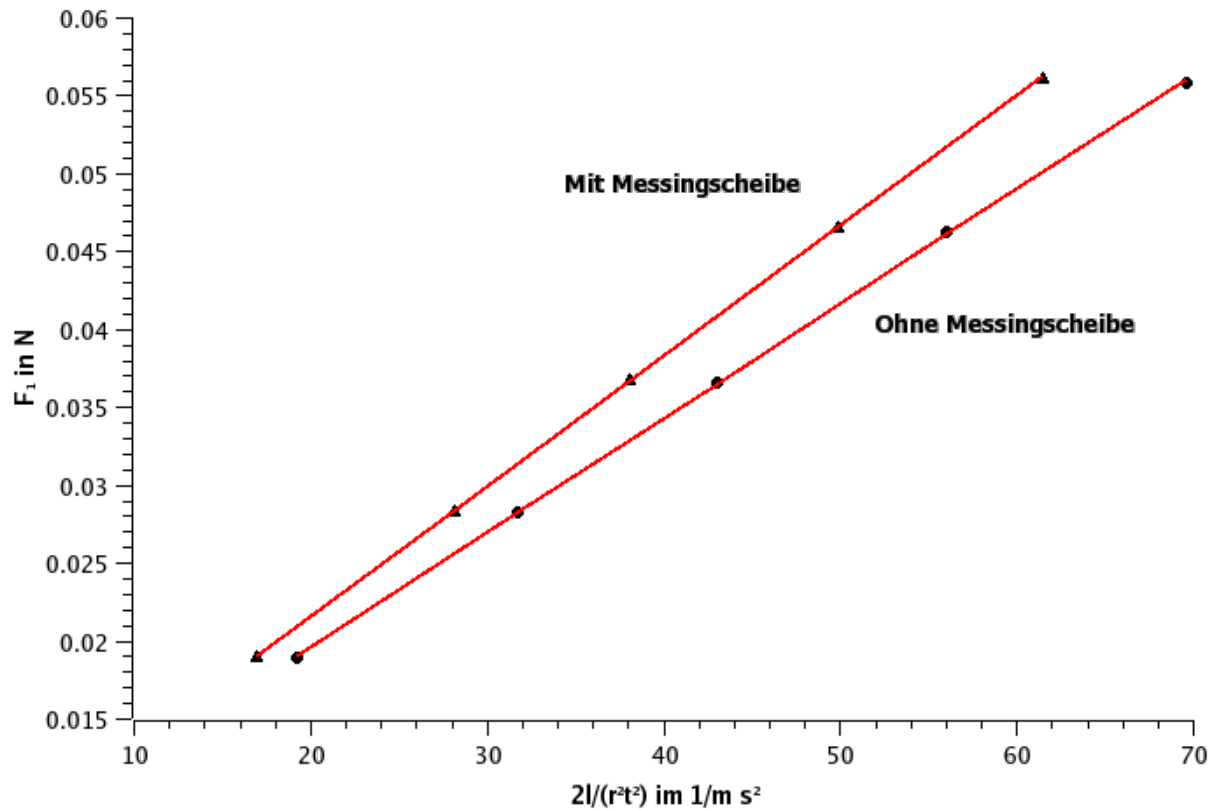


Abb. 4: F_1 aufgetragen über $2l/(r^2 t^2)$ für den Versuch mit und ohne zusätzliche Messingscheibe

Nun können wir mit der Software QtiPlot die Steigungen und y-Achsenabschnitte ausgeben lassen:

Ohne Messingscheibe

$$I_d = 0,733 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \pm 0,5 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$F_{rd} = 0,503 \cdot 10^{-2} \text{ N} \pm 0,21 \cdot 10^{-3} \text{ N}$$

Mit Messingscheibe

$$I = 0,835 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \pm 0,3 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$F_{rd} = 0,493 \cdot 10^{-2} \text{ N} \pm 0,11 \cdot 10^{-3} \text{ N}$$

Jetzt können wir das Trägheitsmoment I_k der Messingscheibe ermitteln:

$$I_k = I - I_d$$

$$I_k = 0,835 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 - 0,733 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 = 0,102 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Den Fehler für I_k bestimmen wir mit Hilfe des Größtfehlers der Fehlerfortpflanzung:

$$\begin{aligned}\Delta I_k &= \left| \frac{\partial I_k}{\partial I} \right|_M \Delta I + \left| \frac{\partial I_k}{\partial I_d} \right|_M \Delta I_d = |\Delta I - \Delta I_d| \\ &= |0,3 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 - 0,5 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2| = 0,2 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2\end{aligned}$$

Wir halten als Messergebnis für I_k fest: $I_k = 0,102 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \pm 0,2 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

Um unseren Messwert mit einem theoretischen Wert vergleichen zu können, müssen wir die bekannte Formel für das Trägheitsmoment wie folgt umformen (vgl. Frage 2):

$$I = \int r^2 dm = \int r^2 \rho dV = \int r^2 \rho \pi h r dr = \int \rho V r dr = \int m r dr = \frac{1}{2} m r^2$$

Wir haben damit eine Formel gefunden, mit der wir das Trägheitsmoment eines um sich selbst rotierenden Vollzylinder berechnen können. Wir setzen nun die ermittelten Werte für m und r in die Gleichung ein und erhalten den theoretischen Wert für diesen Versuch:

$$I = \frac{1}{2} m r^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,202129 \text{ kg} \cdot (0,03 \text{ m})^2 = 0,091 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$$

Damit weicht unser Messwert um ca. 11% vom theoretisch zu erwartenden Wert ab. Diese Abweichung ist vor allem auf die sehr empfindliche Versuchsanordnung zurückzuführen.

3.2. Bestimmung der Lage einer Schwerpunktachse eines unregelmäßig geformten Körpers

In diesem Versuch wollen wir die Lage der Schwerpunktachse eines unregelmäßig geformten Körpers bestimmen. Dazu liegt ein Probekörper bereit, der mit Hilfe zweier Haltstifte in verschiedenen Positionen am Drehtisch befestigt werden kann. Wir beziehen uns jeweils auf einen der beiden Stifte und bezeichnen ihn mit P. Wir befestigen den Körper an zehn verschiedenen Positionen am Drehtisch und bestimmen jeweils die Entfernung zum Mittelpunkt des Tisches. Diese Entfernung bezeichnen wir als y_i . Für jede Position messen wir mit einem Gewicht je dreimal die Fallzeit t und bilden anschließend den Mittelwert. Dabei haben wir folgende Ergebnisse erzielt:

- Beschleunigungsmasse m : 6,02g
- Fallstrecke l : 37,5 cm

$y_1 = 6 \text{ cm}$ $t_1 = 1,8916\text{s}$ $t_2 = 1,8244\text{s}$ $t_3 = 1,8917\text{s}$ $\bar{t} = 1,8692\text{s}$	$y_1 = 5 \text{ cm}$ $t_1 = 1,7731\text{s}$ $t_2 = 1,7783\text{s}$ $t_3 = 1,7665\text{s}$ $\bar{t} = 1,7726\text{s}$	$y_1 = 4 \text{ cm}$ $t_1 = 1,6840\text{s}$ $t_2 = 1,68\text{s}$ $t_3 = 1,6873\text{s}$ $\bar{t} = 1,6838\text{s}$	$y_1 = 3 \text{ cm}$ $t_1 = 1,6128\text{s}$ $t_2 = 1,6003\text{s}$ $t_3 = 1,6014\text{s}$ $\bar{t} = 1,6048\text{s}$	$y_1 = 2 \text{ cm}$ $t_1 = 1,5694\text{s}$ $t_2 = 1,5654\text{s}$ $t_3 = 1,5665\text{s}$ $\bar{t} = 1,5671\text{s}$
$y_1 = 1 \text{ cm}$ $t_1 = 1,5599\text{s}$ $t_2 = 1,5615\text{s}$ $t_3 = 1,5688\text{s}$ $\bar{t} = 1,5634\text{s}$	$y_1 = 0 \text{ cm}$ $t_1 = 1,584\text{s}$ $t_2 = 1,5939\text{s}$ $t_3 = 1,5884\text{s}$ $\bar{t} = 1,5888\text{s}$	$y_1 = -1 \text{ cm}$ $t_1 = 1,6503\text{s}$ $t_2 = 1,6542\text{s}$ $t_3 = 1,6543\text{s}$ $\bar{t} = 1,6529\text{s}$	$y_1 = -2 \text{ cm}$ $t_1 = 1,7539\text{s}$ $t_2 = 1,7654\text{s}$ $t_3 = 1,7478\text{s}$ $\bar{t} = 1,7557\text{s}$	$y_1 = -3 \text{ cm}$ $t_1 = 1,8875\text{s}$ $t_2 = 1,8641\text{s}$ $t_3 = 1,8782\text{s}$ $\bar{t} = 1,8766\text{s}$

Tab. 5: Messergebnisse für Versuch 3.2

Nun tragen wir y_i über t in einem Diagramm auf. Wir „fitten“ den Graphen mit einer Exponentialfunktion zweiten Grades und berechnen dann anschließend aus der ersten Ableitung dieser Funktion deren Minimum. Auf analoge Weise ließe sich dies für die x-Richtung durchführen, worauf wir aus Zeitgründen aber verzichten. Mit Hilfe dieser beiden Größen ließe sich dann die Lage des Schwerpunktes angeben.

Das Diagramm der Messwerte und der zugehörige Fit sehen wie folgt aus:

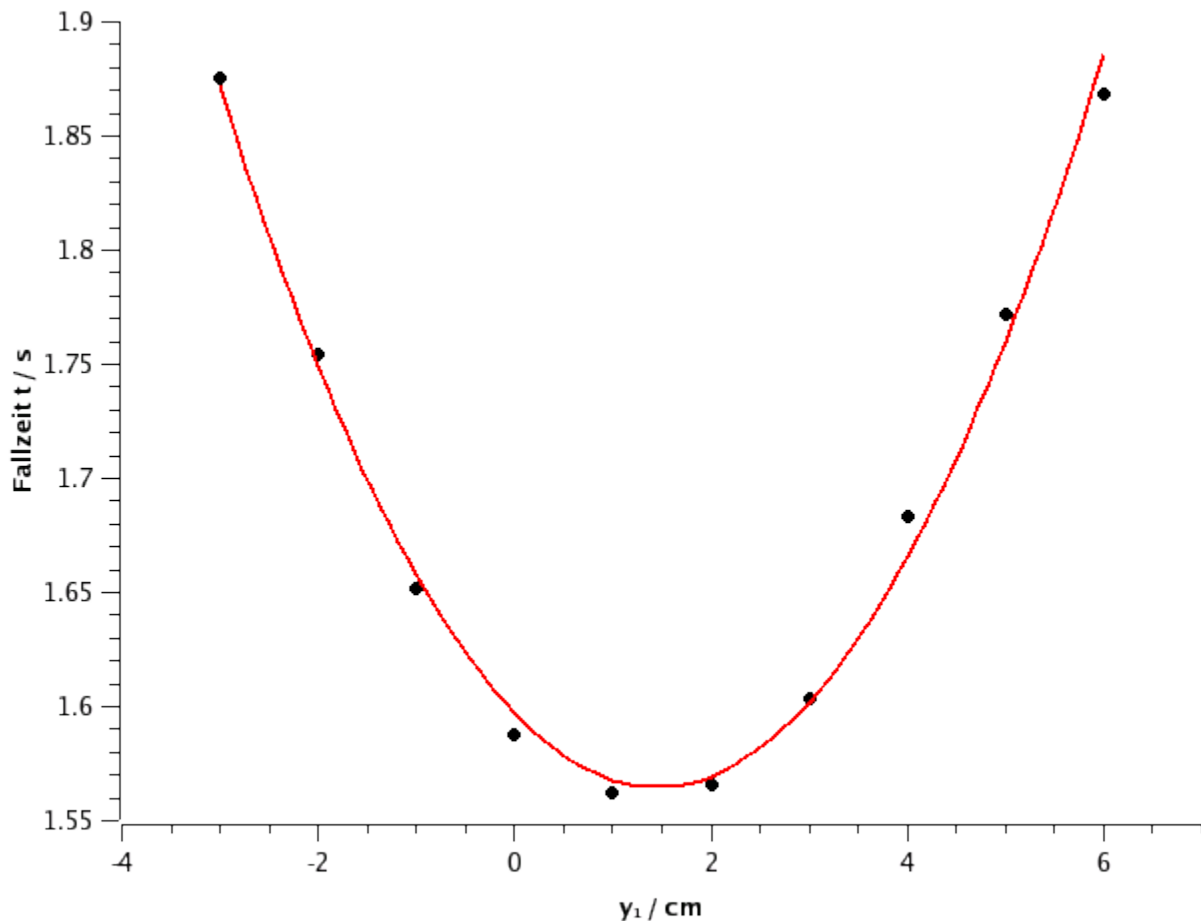


Abb. 5: Grafische Darstellung der Messwerte von Versuch 3.2 und zugehöriger Fit

Wir können nun mit Hilfe der Software QtiPlot die Funktionsgleichung für den Fit bestimmen. Diese lautet:

$$f(x) = 0,0155x^2 - 0,0449x + 1,598$$

Die Funktion hat genau dann ihr Minimum erreicht, wenn die erste Ableitung gleich Null wird. Damit können wir nun den x-Wert des Minimums berechnen:

$$f'(x) = 0,031x - 0,0449 = 0 \Leftrightarrow x = 1,448$$

Die Funktion hat also bei 1,448 ein Minimum. Das bedeutet, dass der Schwerpunkt etwa 1,448cm vom Punkt P in y-Richtung entfernt ist.

4. Anhang

4.1. Literatur

- [1] Skript zum Anfängerpraktikum Physik I, CvO Universität Oldenburg, Institut für Physik, Oktober 2005
- [2] dtv-Atlas Physik, Band 1, Deutscher Taschenbuch Verlag, 7. Auflage, August 2004
- [3] <http://de.wikipedia.org/wiki/Trägheitsmoment>

4.2. Abbildungsnachweis

- **Abb. 1:**
<http://www.physik.uni-oldenburg.de/Docs/praktika/APR/pdf/Traegheitsmomente.pdf>
- **Abb. 3:**
<http://www.physik.uni-oldenburg.de/Docs/praktika/APR/pdf/Traegheitsmomente.pdf>