

PROTOKOLL ZUM ANFÄNGERPRAKTIKUM PHYSIK

Viskosität und Reynoldszahlen

Sebastian Finkel
Sebastian Wilken

Versuchsdurchführung:
07. Dezember 2005

0. Inhalt

1. Einleitung

2. Theoretischer Teil

- 2.1. Bestimmung der Viskosität nach Stokes
- 2.2. Laminare und turbulente Strömungen
- 2.3. Reynoldszahlen
- 2.4. Viskosität und Auftrieb
- 2.5. Allgemeine Bestimmung der Viskosität η
- 2.6. Bestimmung der Viskosität mit einem Kapillarviskosimeter nach Ubbelohde

3. Praktischer Teil

- 3.1. Bestimmung der Viskosität eines Glyzerin-Wasser-Gemisches mit der Kugelfallmethode
- 3.2. Bestimmung von Reynoldszahlen mit der Kugelfallmethode
- 3.3. Bestimmung der kinematischen Viskosität mit dem Kapillarviskosimeter

4. Anhang

- 4.1. Literatur
- 4.2. Abbildungsnachweis

5. Anlage

1. Einleitung

In diesem Versuch wollen wir die Viskosität von Flüssigkeiten näher betrachten und bestimmen. Dazu benutzen wir die Kugelfallmethode nach Stokes und ein Kapillarviskosimeter nach Ubbelohde. Desweiteren lernen wir die Reynoldszahlen zur Unterscheidung laminarer und turbulenter Strömungen kennen. Auch die Reynoldszahlen werden wir mit der Kugelfallmethode bestimmen.

2. Theoretischer Teil

2.1. Bestimmung der Viskosität nach Stokes

Wir betrachten zunächst eine Kugel mit dem Radius r und der Geschwindigkeit v , die durch eine unendlich ausgedehnte Flüssigkeit bewegt wird (siehe Abb. 1). Damit diese Bewegung durchgeführt werden kann, müssen Reibungskräfte überwunden werden. Sieht man eine Flüssigkeit als Überlagerung vieler Molekülschichten an, so rührt die Reibung daher, dass die Kugel an der anliegenden Schicht haftet und diese mitreißt, wenn sie sich bewegt. Diese Haftung führt sich auch innerhalb der Flüssigkeitsschichten fort. Diese Reibung verursacht in der Umgebung der Kugel eine Strömung, die immer kleiner wird, je weiter man sich von der Kugelbahnrichtung vertikal entfernt.

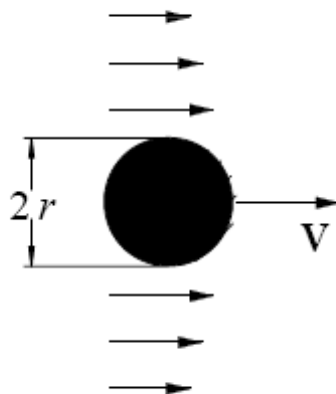


Abb. 1: Bewegung einer Kugel in einer Flüssigkeit

Als Ergebnis für die Reibungskraft ergibt sich mit den *Navier-Stokes*-Gleichungen:

$$F_R = 6\pi\eta r v \text{ (Stokessches Gesetz)}$$

Anhand der Formel lässt sich erkennen, dass die Reibungskraft proportional zur Geschwindigkeit v und zum Radius r ist. Die Größe η heißt Viskosität und ist eine Konstante mit der Einheit kg/ms oder Ns/m².

2.2. Laminare und turbulente Strömungen

Das Stokessche Gesetz hat jedoch nur dann Gültigkeit, wenn eine so genannte laminare Strömung an der sich in der Flüssigkeit bewegenden Kugel vorliegt. Dies bedeutet, dass die einzelnen Flüssigkeitsschichten glatt aneinander vorbeifließen und nicht verwirbeln. Anderenfalls liegt eine turbulente Strömung vor, bei der sich im Gegensatz zu den geraden Linien bei der laminaren Strömung verwirbelte Stromlinien an den kugelnahen Schichten ergeben. Abb. 2 illustriert den Unterschied zwischen den beiden Strömungsverhalten einer Kugel. Sollte eine Strömung turbulent sein, so gilt dann:

$$F \propto v^2$$

Der Kraftaufwand, der benötigt wird, um die Kugel zu bewegen, wächst also im Quadrat der Geschwindigkeit.

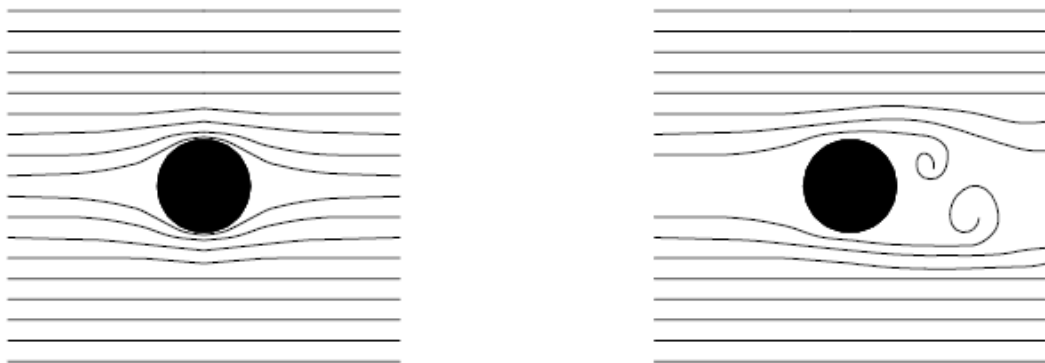


Abb.2: Laminare und turbulente Strömung

2.3. Reynoldszahlen

Um abschätzen zu können, ob eine Strömung noch laminar verläuft und wir somit das Stokessche Gesetz anwenden können, benutzen wir die so genannte Reynoldzahl Re . Diese ist dimensionslos und es gilt:

$$(1) \quad Re = \frac{\rho v l}{\eta}$$

ρ ist dabei die Dichte der Flüssigkeit, l im obigen Fall der Durchmesser der Kugel (in einer Kapillare wäre es der Durchmesser des Rohres). Die Länge l ist eine je nach Strömungssystem charakteristische Größe. Veranschaulichen lässt sich die Reynoldszahl, indem man die kinetische Energie und die Reibungsenergie eines kugelförmigen Teilchens, welches sich durch eine Flüssigkeit bewegt, getrennt voneinander betrachtet. Dafür ergibt sich dann:

$$(2) \quad E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{mit } m_K = \frac{1}{6}\pi \cdot \rho l^3$$

$$(3) \quad E_{kin} = \frac{1}{12}\pi\rho l^3 v^2$$

$$(4) \quad E_{reib} = F_R \cdot l = 3\pi\eta l^2 v$$

Nun erkennt man, dass die Reynoldszahl proportional zum Quotienten aus kinetischer Energie und Reibungsenergie ist:

$$(5) \quad \text{Re} \propto \alpha \cdot \frac{E_{kin}}{E_{reib}}$$

Bei „kleinen“ Reynoldszahlen ist eine Strömung laminar und bei „großen“ Reynoldszahlen wird sie turbulent. Man kann dies jedoch nur relativ sagen, da die jeweiligen Versuchsbedingungen immer eine wichtige Rolle spielen. Einige Beispiele für Reynoldszahlen:

- Strömungen in einem Rohr: $\text{Re} < 1000 - 1500$.
- Kugel in Luft: $\text{Re} < 1$
- Kugel in Flüssigkeit: $\text{Re} < 0,4$

Sind diese Bedingungen jeweils erfüllt, ist das Stokessche Gesetz gültig. Die Fallbewegung einer Kugel in einer Flüssigkeit verläuft also beispielsweise genau dann laminar, wenn die Reynoldszahl kleiner als 0,4 ist.

2.4. Viskosität und Auftrieb

Wir betrachten nun genauer eine Kugel der Masse m , des Radius' r und des Volumens V , die sich in einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit befindet. ρ_F sei die Dichte der Flüssigkeit und η ihre Viskosität. Für die Kräfte, die auf die fallende Kugel wirken, ergibt sich dann:

$$F_G = mg \quad (\text{Gewichtskraft})$$

$$F_A = \rho_F V g \quad (\text{Auftriebskraft})$$

$$F_R = 6\pi\eta r v \quad (\text{Reibungskraft})$$

Nennen wir F die Resultierende dieser Kräfte, folgt:

$$(6) \quad F = F_G - F_A - F_R$$

Diese Kraft beschleunigt die Kugel zunächst, so dass sich die Geschwindigkeit v solange erhöht, bis die von v abhängige Kraft F_R genauso groß ist und schließlich keine Beschleunigung mehr stattfindet. Dann fällt die Kugel mit konstanter Geschwindigkeit v_0 und es gilt:

$$(7) \quad F_G - F_A - F_R = 0$$

Auf eine Blase wirken die gleichen Kräfte wie auf die oben getrachtete Kugel. Die Gewichtskraft hält die Blase am Boden, während die Auftriebskraft die Blase nach oben drückt. Die Reibungskraft wirkt erst auf die Blase, wenn sie sich mit einer Geschwindigkeit v bewegt, also gilt genau dann wenn $F_A > F_G$. Nun steigt die Blase auf. Die Aufstiegs geschwindigkeit v_0 ist dann wieder abhängig von der Reibungskraft (vgl Frage 1).

2.5. Allgemeine Bestimmung der Viskosität η

Setzen wir nun in Gleichung (7) $v = v_0$ ein, erhalten wir einen Term, bei dem wir mit wenigen weiteren Schritten die Viskosität eines Stoffes allgemein bestimmen können, weil er nur noch abhängig von messbaren oder bekannten Größen ist.

$$mg - \rho_F V g - 6\pi\eta r v = 0$$

Mit $m = \rho_K V$ und $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ nach η umgestellt erhalten wir dann:

$$(8) \quad \eta = \frac{2}{9} r^2 g \frac{(\rho_K - \rho_F)}{v_0}$$

Für den realen Fall muss jedoch noch berücksichtigt werden, dass es z.B. beim Fall einer Kugel in einem mit Flüssigkeit gefüllten Zylinder mit dem Radius R auch eine Reibung zwischen der

Flüssigkeit und der Zylinderwand vorherrscht. Für die gemessene Geschwindigkeit v_l gilt dann nämlich:

$$v_l = \frac{1}{\lambda} v_0$$

Für den Korrekturfaktor λ gilt nach Ladenburg dann näherungsweise:

$$(9) \quad \lambda = 1 + k \frac{r}{R}, \quad k = \text{Konstante}$$

In Gleichung (8) eingesetzt erhält man dann eine Formel, mit der sich die Viskosität von Flüssigkeiten oder auch Gasen einfach bestimmen lässt.

$$(10) \quad \eta = \frac{2}{9} r^2 g \frac{(\rho_K - \rho_F)}{\lambda v_l}$$

2.6. Bestimmung der Viskosität mit einem Kapillarviskosimeter nach Ubbelohde

Betrachten wir nun eine senkrechte Kapillare mit dem Radius r_0 , durch die eine Flüssigkeit strömt. Wir wissen, dass dann das Flüssigkeitsvolumen V , das während der Zeit Δt durch die Kapillare fließt, von der Viskosität η abhängig ist. Das heißt, je größer η wird, desto kleiner wird V und umgekehrt. Diesen Zusammenhang wollen wir nun näher erläutern und für das Kapillarviskosimeter nutzen.

Sei unsere Flüssigkeit ideal, also inkompressibel und frei von Reibungskräften. Diese Flüssigkeit fließe nun durch ein verjüngtes horizontales Rohr. Wir wissen dann durch die aufgestellten Bedingungen, dass das durchströmende Volumen pro Zeit an jeder Stelle gleich ist. Seien A_1 und v_1 nun die Grundfläche der linken Seite des Rohres und A_2 und v_2 entsprechend der rechten Seite (siehe Abb. 3).

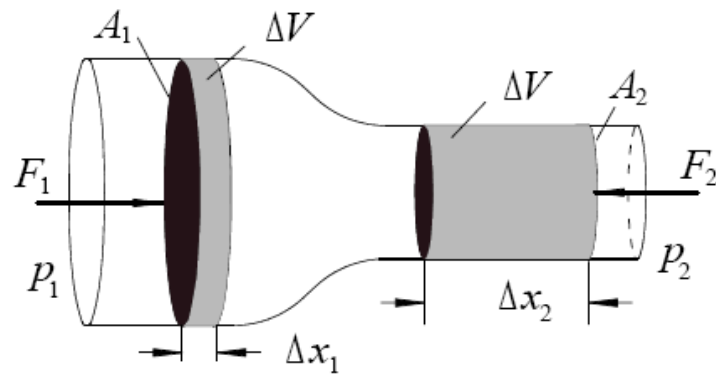


Abb. 3: Stömung durch ein verjüngtes horizontales Rohr

Es gilt nach unseren aufgestellten Bedingungen:

$$(11) \quad A_1 v_1 = A_2 v_2 = \text{konst.}$$

Man nennt dies Kontinuitätskonstante.

Um nun ein bestimmtes Volumen V um eine Strecke Δx zu bewegen, muss jeweils der statische Druck p überwunden und die Arbeit W verrichtet werden. Für die beiden Seiten gilt nun:

$$(12) \quad W_1 = F_1 \Delta x_1 = p_1 A_1 \Delta x_1 = p_1 \Delta V$$

$$(13) \quad W_2 = F_2 \Delta x_2 = p_2 A_2 \Delta x_2 = p_2 \Delta V$$

Wegen der Energieerhaltung folgt nun, dass die Arbeitsdifferenz $W_1 - W_2$ im rechten Teil des Rohres nun zu einer Zunahme der kinetischen Energie der Flüssigkeit führen muss. Es gilt:

$$(14) \quad W_1 - W_2 = p_1 \Delta V - p_2 \Delta V = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} \rho \Delta V v_2^2 - \frac{1}{2} \rho \Delta V v_1^2$$

Vereinfachen wir diesen Term, so erhalten wir:

$$(15) \quad p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 := p + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{konst.}$$

Dies nennt man das *Bernoullische Gesetz*, das besagt das die Summe aus statischem Druck p und Staudruck $\frac{1}{2}\rho v^2$ an jeder Stelle des Rohres konstant ist. Da wir in unserem Fall ein vertikales Rohr im Kapillarviskosimeter haben, muss der von der Höhe h abhängige hydrostatische Druck noch berücksichtigt werden. So ergibt sich also für das Bernoullische Gesetz für ein vertikales Rohr:

$$(16) \quad p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh = konst.$$

Nun betrachten wir eine reale Flüssigkeit, die durch ein Rohr fließt. Im Gegensatz zu idealen Flüssigkeit treten hier Reibungskräfte zwischen den einzelnen Flüssigkeitsschichten und dem Rohrmantel auf. Dies hat zur Folge, dass der Druck längs des Rohres abnehmen muss und die Strömungsgeschwindigkeit entlang des Rohrquerschnitts von innen, wo sie maximal ist, nach außen, wo sie null beträgt, abnimmt.

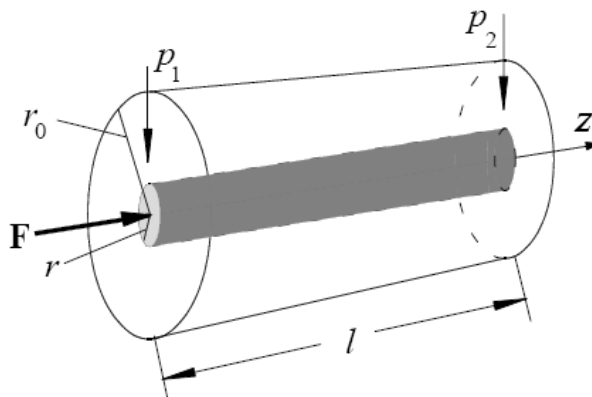


Abb. 4: Zylindrisches Rohr mit koaxialem Flüssigkeitszylinder

Betrachten wir nun ein Rohr wie in Abb. 4. Es habe die Länge l und den Radius r_0 und werde in z -Richtung von einer realen Flüssigkeit durchströmt. Innerhalb dieser Flüssigkeit betrachten wir nun eine koaxialen Flüssigkeitszylinder mit dem Radius r , und der Mantelfläche $A = 2\pi r l$. Nach Newton gilt nun für die Reibungskraft F_R zwischen dem Zylinder und der anliegenden Flüssigkeitsschicht, dass diese proportional zur Mantelfläche und zum Geschwindigkeitsgefälle dv/dr ist. Die Viskosität η ist dabei die Proportionalitätskonstante. Es gilt:

$$(17) \quad F_R = \eta A \frac{dv}{dr} = 2\pi r l \eta \frac{dv}{dr}$$

Ist die Strömungsgeschwindigkeit dabei konstant, ist die Reibungskraft F_R gerade genauso groß wie die Druckkraft F , die durch das Druckgefälle Δp verursacht wird. Für F gilt:

$$(18) \quad F = \pi r^2 \Delta p = 2\pi r l \eta \frac{dv}{dr}$$

Umgeformt und nach dv aufgelöst erhalten wir:

$$(19) \quad dv = \frac{\Delta p}{2\eta l} r \cdot dr$$

Integrieren wir nun noch mit der Randbedingung $v(r_0) = 0$, ergibt sich:

$$(20) \quad v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta l} (r_0^2 - r^2); \quad 0 \leq r \leq r_0$$

Anhand der Formel erkennen wir nun leicht, dass das transversale Geschwindigkeitsprofil für eine laminare Strömung durch ein Rohr parabolisch ist.

Wollen wir nun das Volumen V , das während der Zeit Δt durch ein Rohr mit den Radius r_0 fließt bestimmen, betrachten wir zunächst den Volumenstrom $\Delta V / \Delta t$ durch einen Zylinder mit dem Innenradius r und dem Außenradius $r + dr$ (siehe Abb. 5). Sei dr klein, dann ergibt sich:

$$(21) \quad \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{A \Delta l}{\Delta t} = 2\pi r dr \frac{\Delta l}{\Delta t} = 2\pi r dr v(r) = 2\pi r \frac{\Delta p}{4\eta l} (r_0^2 - r^2) dr$$

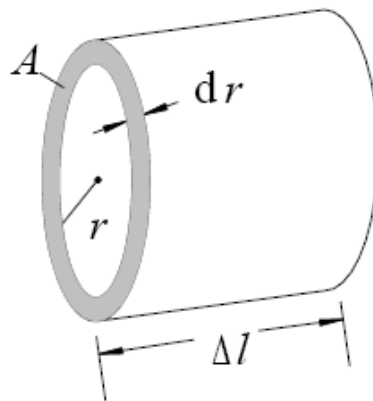


Abb. 5: Zylinder zur Veranschaulichung geometrischer Größen eines Hohlzylinders

Mit Hilfe von Formel (21) und durch Integration erhalten wir für das Volumen V das in der Zeit Δt durch das Rohr mit dem Radius r_0 fließt:

$$(22) \quad V = \frac{\pi \Delta p \Delta t}{8 \eta l} r_0^4$$

Diese Formel nennt man das *Hagen-Poiseullesche* Gesetz für laminare Strömungen. Laminare Strömungen haben wir in diesem Fall für Reynoldszahlen kleiner als 1000-1500. Man kann Gleichung (1) auch auf diesen Fall übertragen und erhält:

$$(23) \quad \text{Re} = \frac{\rho v_m 2r_0}{\eta}, \quad \text{mit } \rho \text{ Dichte der Flüssigkeit, } v_m \text{ mittlere Strömungsgeschw.}$$

Man kann die Hagen-Poiseullesche Gleichung auch dazu verwenden, um die Viskosität zu bestimmen. In diesem Fall nimmt man dazu ein Kapillarviskosimeter nach Ubbelohde (siehe Abb. 6).

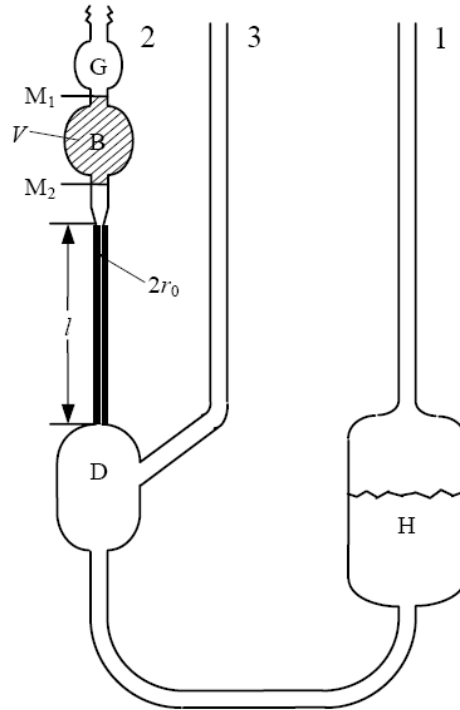


Abb. 6: Kapillarriskosimeter nach Ubbelohde

Durch die Kapillare mit dem Radius r_0 und der Länge l lässt man eine Flüssigkeiten die sich im Vorratsbehälter B befindet, von dem sich ein weiterer Behälter, das so genannte Vorlaufgefäß befindet, laufen. Beim Absinken von M_1 nach M_2 misst man die Zeit Δt , die die Flüssigkeit dafür benötigt. Wir stellen Gleichung (22) nach η um und erhalten:

$$(24) \quad \eta = \frac{\pi \Delta p r_0^4}{8 l V} \Delta t$$

Die Druckdifferenz ist in diesem Fall der hydrostatische Druck:

$$\Delta p(t) = \rho g h(t)$$

$h(t)$ ist dabei die Höhendifferenz zwischen dem momentanen Flüssigkeitsstand im Gefäß B und dem Ende der Kapillare. Dass das Ende der Kapillare die Referenzhöhe bildet erreicht man durch das Belüftungsrohr 3, dass dafür sorgt, dass im Auslaufgefäß D Luftdruck herrscht. Dadurch läuft ein dünner Film der Flüssigkeit an der Innenwand von D herab und es bildet sich ein so genanntes hängendes Kugelniveau. Da die Druckhöhe $h(t)$ zeitabhängig ist, gilt dies auch für die Druckdifferenz $\Delta p(t)$. Die Druckhöhe $h(t)$ kann durch die mittlere Druckhöhe h ersetzt werden:

$$(25) \quad h = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} h(t) dt$$

Dann folgt mit Gleichung (24) für die Viskosität:

$$(26) \quad \eta = \frac{\pi g h r_0^4}{8 l V} \rho \Delta t$$

Den Vorfaktor von $\rho \Delta t$ bezeichnet man als Apparatekonstante K . Diese ist auf Viskosimetern in den Einheiten m^2/s^2 oder mm^2/s^2 angegeben. Es gilt:

$$(27) \quad K = \frac{\pi g h r_0^4}{8 l V}$$

Nun können wir für die Viskosität schreiben:

$$(28) \quad \eta = K \rho \Delta t$$

Für die kinematische Viskosität erhalten wir nun:

$$(29) \quad \nu = K \Delta t$$

Als Einheit für die kinematische Viskosität benutzen wir m^2/s .

Die Gleichungen (28) und (29) sind noch mit einem gewissen Fehler behaftet, da die Flüssigkeit beschleunigt wird, wenn sie aus dem Vorratsgefäß B in die Kapillare eintritt. Die dazu erforderliche Arbeit führt zu einem kleinen Druckverlust, der einer Vergrößerung der gemessenen Zeiten führt. Daher muss von den gemessenen Zeiten eine Korrekturzeit t_K abgezogen werden, die als Apparatekonstante auf dem Viskosimeter angegeben ist. Es gilt also:

$$\nu = K (\Delta t - t_K)$$

3. Praktischer Teil

3.1. Bestimmung der Viskosität eines Glycerin-Wasser-Gemisches mit der Kugelfallmethode

Für diesen Versuchsteil steht ein Gemisch aus Glycerin und Wasser in einem unbekanntem Verhältnis zur Verfügung. Wir wollen mit Hilfe der Kugelfallmethode die Viskosität des Gemisches ermitteln. Dazu verwenden wir Stahlkugeln von Durchmesser $d \approx 2$ mm, welche wir zur Berücksichtigung der Reibungseffekte an der Gefäßwand in sechs Glaszylindern mit unterschiedlichen Radien R fallen lassen. Vor Beginn der Versuchsdurchführung haben wir folgende Größen bestimmt:

- **Dichte ρ_F des Gemisches:** Dazu bestimmen wir zuerst die Leermasse eines 100-ml-Messzylinders mit einer Laborwaage. Dann befüllen wir den Zylinder mit dem Glycerin-Wasser-Gemisch und bestimmen so das Gewicht von 100 ml des Gemisches und können nun die Dichte berechnen.
- **Mittlerer Radius r der Kugeln:** Wir bestimmen mit einer Mikrometerschraube den Durchmesser von zehn Stahlkugeln und bilden anschließend den Mittelwert.
- **Dichte ρ_K der Kugeln:** Wir bestimmen das Gewicht von 100 Stahlkugeln auf der Analysewaage und berechnen dann mit Hilfe des Mittelwertes für den Radius die mittlere Dichte einer Kugel.
- **Radien R der Glaszylinder:** Wir messen den Innendurchmesser der sechs verwendeten Glaszylinder mit einem Messschieber.
- **Temperatur des Gemisches:** Vor Messbeginn bestimmen wir mit einem Digital-Thermometer die Temperatur des Glycerin-Wasser-Gemisches.

Für diese Größen haben wir folgende Ergebnisse und Fehler ermittelt:

$$\text{Dichte } \rho_F: \quad \rho_F = \frac{m}{V} = \frac{125,49 \text{ g}}{100 \text{ ml}} = 1,255 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \quad \Delta \rho_F = \pm 0,0064 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

Radius r der Kugeln:

Kugel	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Radius / mm	0,99	0,985	0,995	0,99	0,995	0,99	0,995	0,995	0,985	0,99

Tab. 1: Gemessene Radien r von zehn Stahlkugeln

Mittelwert: $\bar{r} = 0,991 \text{ mm}$ $\Delta\bar{r} = 0,05 \text{ mm}$

Volumen: $V = n \cdot \frac{4}{3}\pi\bar{r}^3 = 100 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot (0,991 \text{ cm})^3$

$$V = 0,4077 \text{ cm}^3 \pm 0,00097 \text{ cm}^3$$

Dichte ρ_K : $\rho_K = \frac{m}{V} = \frac{3,211 \text{ g}}{0,4077 \text{ cm}^3} = 7,876 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ $\Delta\rho_K = \pm 0,021 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$

Radien R und Temperatur T der Glaszylinder / des Gemisches in der Glaszylindern:

Zylinder	1	2	3	4	5	6
R / cm	3,023	2,337	1,751	1,291	1,078	0,681
T / °C	20	20	20	20	20	20

Tab. 2: Radien R und Temperatur T der für den Versuch verwendeten Glaszylinder

$$\Delta R = \pm 0,001 \text{ cm} \quad \Delta T = \pm 1 \text{ °C}$$

Nun können wir mit der Versuchsdurchführung beginnen. Dazu verschließen wir die Zylinder mit einem zentral durchbohrten Stopfen. Dadurch gewährleisten wir, dass die Reibungskräfte der Außenwände gleichmäßig von allen Seiten auf die fallende Kugel einwirken und somit vernachlässigbar werden (vgl. Frage 3). Wir spannen die Zylinder fest in ein Gestell ein, damit sie während der Versuchsdurchführung nicht verutschen. Wir richten das Gestell mit Hilfe einer Wasserwaage senkrecht aus. Wir bestimmen nun eine Fallstrecke s , welche wir bei der Versuchsdurchführung betrachten. Diese sollte mindestens 5 cm unter der Flüssigkeitsoberfläche beginnen, da die Fallbewegung anfangs eine beschleunigte Bewegung ist und erst ab ca. 5 cm durch die Viskosität der Flüssigkeit eine konstante Geschwindigkeit annimmt (vgl. Frage 2). Zudem sollte die Fallstrecke nicht bis zum Boden der Zylinder reichen, da sich dort nach mehreren Durchführungen die Kugeln stapeln, was zu Messungenauigkeiten führen kann. Im unserem Fall wählen wir eine Fallstrecke von $10,012 \text{ cm} \pm 0,001 \text{ cm}$.

Wir lassen nun pro Gefäß zehn Kugeln hineinfallen und bestimmen mit Hilfe einer Stoppuhr die Fallzeit t für die Fallstrecke s . Anschließend bestimmen wir für jeden Zylinder den Mittelwert für t und die Standardabweichung des Mittelwertes und berechnen dann mit folgender Formel die Sinkgeschwindigkeit:

$$v = \frac{s}{t}$$

Zylinder 1 – R = 3,023 cm

Kugel	Fallzeit t / s
1	9,87
2	9,65
3	9,74
4	9,57
5	9,73
6	9,61
7	9,68
8	9,49
9	9,63
10	9,47

Mittelwert für t: $\bar{t} = 9,64 \text{ s}$ Standardabweichung: $\sigma_{\bar{t}} = \pm 0,11 \text{ s}$

$$v_1 = 1,038 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \pm 0,012 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

Zylinder 2 – R = 2,337 cm

Kugel	Fallzeit t / s
1	9,81
2	9,88
3	9,93
4	9,87
5	9,88
6	9,68
7	9,89
8	10,08
9	9,93
10	9,82

Mittelwert für t: $\bar{t} = 9,88 \text{ s}$ Standardabweichung: $\sigma_{\bar{t}} = \pm 0,097 \text{ s}$

$$v_2 = 1,013 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \pm 0,01 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

Zylinder 3 – R = 1,751 cm

Kugel	Fallzeit t / s
1	10,03
2	10,06
3	9,96
4	10,02
5	10,01
6	10,14
7	10,26
8	10,12
9	10,06
10	10,08

Mittelwert für t: $\bar{t} = 10,07 \text{ s}$ Standardabweichung: $\sigma_{\bar{t}} = \pm 0,078 \text{ s}$

$$v_3 = 0,994 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \pm 0,008 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

Zylinder 4 – R = 1,291 cm

Kugel	Fallzeit t / s
1	10,38
2	10,30
3	10,31
4	10,25
5	10,27
6	10,31
7	10,51
8	10,09
9	10,34
10	10,31

Mittelwert für t: $\bar{t} = 10,31 \text{ s}$ Standardabweichung: $\sigma_{\bar{t}} = \pm 0,1 \text{ s}$

$$v_4 = 0,971 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \pm 0,01 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

Zylinder 5 – R = 1,078 cm

Kugel	Fallzeit t / s
1	10,38
2	10,27
3	10,38
4	10,34
5	10,38
6	10,49
7	10,59
8	10,35
9	10,41
10	10,54

Mittelwert für t: $\bar{t} = 10,41 \text{ s}$ Standardabweichung: $\sigma_{\bar{t}} = \pm 0,093 \text{ s}$

$$v_5 = 0,962 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \pm 0,009 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

Zylinder 6 – R = 0,681 cm

Kugel	Fallzeit t / s
1	11,63
2	11,69
3	11,56
4	11,60
5	11,82
6	11,83
7	11,74
8	11,83
9	11,65
10	11,88

Mittelwert für t: $\bar{t} = 11,72 \text{ s}$ Standardabweichung: $\sigma_{\bar{t}} = \pm 0,107 \text{ s}$

$$v_6 = 0,854 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \pm 0,008 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

Tab. 3 – 8: Falldauern für je zehn Stahlkugeln in sechs verschiedenen Glaszylindern

Nun tragen wir $1/v$ über r/R auf und zeichnen eine Ausgleichskurve ein. Dabei berücksichtigen wir die Messwerte für Zylinder 6 nicht, da hier die Ladenburg-Korrektur aufgrund des kleinen Radius' nicht mehr gilt. Durch Extrapolation ermitteln wir den Schnittpunkt mit der $1/v$ -Achse. An diesem Punkt ist der r/R -Wert gleich Null und somit wäre der Radius des Gefäßes theoretisch unendlich groß. Durch diese Vorgehensweise erhalten wir einen Geschwindigkeitswert v_0 für eine unendlich ausgedehnte Flüssigkeit. Dies lässt sich wie folgte Begründen:

Da wir es mit endlich ausgedehnten Flüssigkeiten zu tun haben, gilt:

$$v = \frac{1}{\lambda} v_0 \Leftrightarrow \frac{1}{v} = \lambda \frac{1}{v_0}$$

Nach Ladenburg gilt für λ :

$$\lambda = 1 + k \frac{r}{R} \quad k = \text{Konstante}$$

Dann können wir für $1/v$ schreiben:

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} + \frac{k}{v_0} \cdot \frac{r}{R}$$

Daher erwarten wir für das Diagramm von $1/v$ über r/R eine Gerade mit der Steigung k/v_0 und der $1/v$ -Achsenabschnitt $1/v_0$. Wir können also v_0 bestimmen, indem wir einfach den Schnittpunkt der Gerade mit der $1/v$ -Achse ablesen und davon den Kehrwert bilden (vgl. Frage 4):

Zylinder	$1/v$ in s/m	r/R in m/m
1	96,33	0,033
2	98,72	0,042
3	100,6	0,057
4	102,99	0,077
5	103,95	0,092

Tab. 9: Wertetabelle für $1/v$ und r/R für die ersten fünf Glaszylinder

Aus den berechneten Werten ergibt sich folgende Kurve:

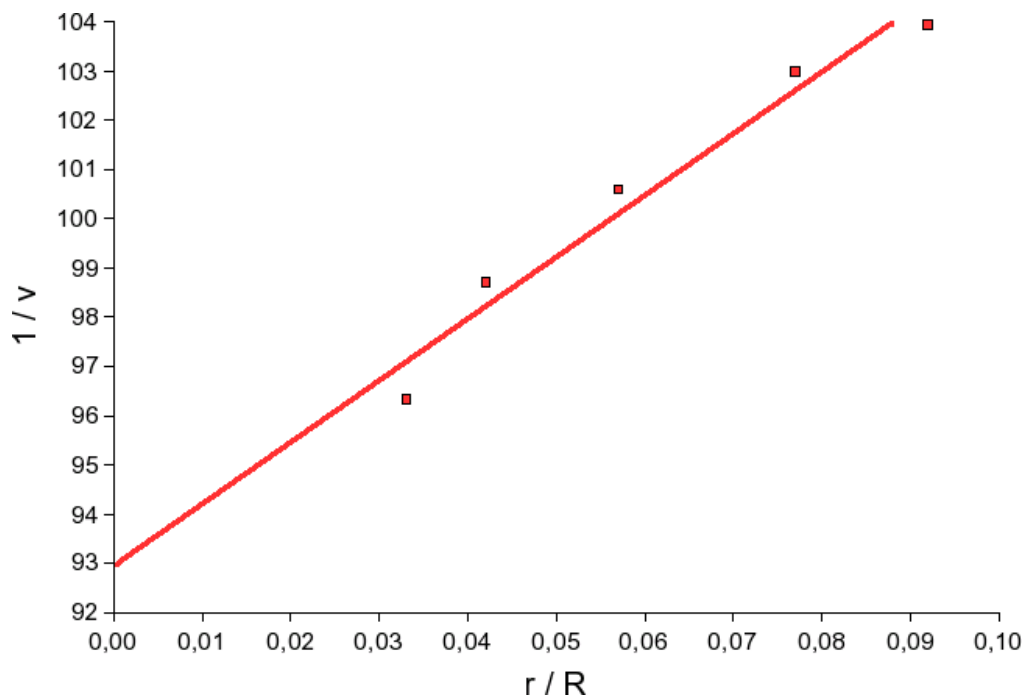


Abb. 7: Schaubild von $1/v$ über r/R

Wir können nun ablesen, dass $1/v_0$ 92,99 s/m beträgt. Daraus folgt:

$$v_0 = \frac{1}{92,99 \frac{s}{m}} = 0,011 \frac{m}{s} \pm 0,00065 \frac{m}{s}$$

Mit Hilfe der Geschwindigkeit v_0 können wir nun die Viskosität des Glycerin-Wasser-Gemisches berechnen:

$$\eta = \frac{2}{9} r^2 g \frac{(\rho_K - \rho_F)}{v_0}$$

$$\eta = \frac{2}{9} \cdot (0,000991 m)^2 \cdot 9,81341 \frac{m}{s^2} \frac{(7876 \frac{kg}{m^3} - 1255 \frac{kg}{m^3})}{0,011 \frac{m}{s}} = 1,289 \frac{kg}{m s}$$

Für die Fehlerangabe benutzen wir die Formel für den Größtfehler aus der Fehlerfortpflanzung nach Gauss:

$$\Delta \eta = \left(\frac{4}{9} r g \frac{(\rho_K - \rho_F)}{v_0} \right) \Delta r + \left(\frac{2}{9} r^2 g \frac{1}{v_0} \right) \Delta \rho_K + \left(-\frac{2}{9} r^2 g \frac{1}{v_0} \right) \Delta \rho_F$$

$$+ \left(-\frac{2}{9} r^2 g \frac{(\rho_K + \rho_F)}{v^2} \right) \Delta v_0$$

$$\Delta \eta = 0,212 \frac{kg}{m s}$$

Wir können nun als Ergebnis des Versuchsteils 3.1. festhalten:

$$\eta = 1,289 \frac{kg}{m s} \pm 0,212 \frac{kg}{m s}$$

Gemäß Tabelle 1 auf S. 99 in [1] liegt das Verhältnis von Glycerin zu Wasser zwischen 96:4 und 100:0.

3.2. Bestimmung von Reynoldszahlen mit der Kugelfallmethode

In diesem Versuchsteil soll die Reynoldszahl Re für das Fallen von Stahlkugeln mit verschiedenen Durchmessern bestimmt werden. Dazu verwenden wir den selben Aufbau wie im Versuchsteil 3.1., beschränken uns jedoch auf den Glaszylinder mit dem größten Durchmesser. Wir lassen je fünf

Kugeln der Durchmesser $d \approx (2, 3, 4, 5, 6)$ mm fallen. Wie in Versuchsteil 3.1. bestimmen wir den Mittelwert für die Fallzeit und daraus die mittlere Sinkgeschwindigkeit der jeweiligen Kugelgröße. Anschließend bestimmen wir die Reynoldszahl, wobei wir die bereits aus dem letzten Versuchsteil bekannten Werte für ρ und η verwenden. Folgende Ergebnisse haben wir erzielt:

Kugel 1 – d = 1,98 mm

Kugel	Fallzeit / s
1	9,46
2	9,44
3	9,35
4	9,40
5	9,35

$$\bar{t} = 9,4 s \pm 0,045 s$$

$$v_1 = 1,065 \frac{cm}{s} \pm 0,005 \frac{cm}{s}$$

Kugel 2 – d = 2,99 mm

Kugel	Fallzeit / s
1	4,21
2	4,16
3	4,27
4	4,13
5	4,22

$$\bar{t} = 4,2 s \pm 0,045 s$$

$$v_2 = 2,384 \frac{cm}{s} \pm 0,026 \frac{cm}{s}$$

Kugel 2 – d = 3,99 mm

Kugel	Fallzeit / s
1	2,42
2	2,40
3	2,45
4	2,35
5	2,45

$$\bar{t} = 2,41 s \pm 0,037 s$$

$$v_3 = 4,154 \frac{cm}{s} \pm 0,064 \frac{cm}{s}$$

Kugel 4 – d = 4,99 mm

Kugel	Fallzeit / s
1	1,58
2	1,63
3	1,63
4	1,60
5	1,53

$$\bar{t} = 1,59 s \pm 0,037 s$$

$$v_4 = 6,297 \frac{cm}{s} \pm 0,147 \frac{cm}{s}$$

Kugel 5 – d = 5,99 mm

Kugel	Fallzeit / s
1	1,20
2	1,16
3	1,13
4	1,27
5	1,20

$$\bar{t} = 1,19 s \pm 0,047 s$$

$$v_5 = 8,413 \frac{cm}{s} \pm 0,333 \frac{cm}{s}$$

Tab. 10 – 15: Fallzeiten und Geschwindigkeiten für verschiedene Kugeldurchmesser

Wir können nun die Reynoldszahlen für die verschiedenen Kugeldurchmesser mit der folgenden Formel berechnen:

$$Re = \frac{\rho_F v d}{\eta}$$

Als Fehlerangabe verwenden wir den Größtfehler aus der Fehlerfortpflanzung nach Gauss:

$$\Delta Re = \left(\frac{vd}{\eta} \right) \Delta \rho_F + \left(\frac{\rho_F d}{\eta} \right) \Delta v + \left(\frac{\rho_F v}{\eta} \right) \Delta d + \left(\frac{\rho_F v d}{\eta^2} \right) \Delta \eta$$

Für die einzelnen Kugeldurchmesser ergibt sich nun für die Reynoldszahl und deren Fehler:

Kugel und Durchmesser / mm	Reynoldszahl Re
Kugel 1 / 1,98	0,021 ± 0,004
Kugel 2 / 2,99	0,069 ± 0,014
Kugel 3 / 3,99	0,161 ± 0,032
Kugel 4 / 4,99	0,339 ± 0,062
Kugel 5 / 5,99	0,491 ± 0,107

Tab. 16: Reynoldszahlen für verschiedene Kugeldurchmesser

Anhand der Tab. 16 können wir nun feststellen, dass die Strömung bei Kugel 5 nicht mehr laminar verläuft, da die Reynoldszahl größer als 0,4 ist. Unter Berücksichtigung des Fehlers verläuft die Grenze zwischen laminar und nicht laminar genau bei Kugel 4 (vgl. Frage 5).

3.3. Bestimmung der kinematischen Viskosität mit dem Kapillarviskosimeter

Wir wollen nun die kinematische Viskosität von Ethanol bei Raumtemperatur mit einem Kapillarviskosimeter nach Ubbelohde bestimmen (siehe Abb. 6). Das Viskosimeter befindet sich in einem Wasserbad, um die Temperatur T während des Versuchs möglichst konstant zu halten. Vor dem Versuch wurde das Viskosimeter senkrecht ausgerichtet und der Vorratsbehälter H zu $\frac{3}{4}$ mit Ethanol befüllt. Wir verschließen nun Rohr 3 mit dem Finger und saugen so lange durch ein Mundstück an Rohr 2, bis sich das Vorlaufgefäß G gefüllt hat. Dann öffnen wir Rohr 3 wieder und messen die Zeit t , die vergeht, bis der Flüssigkeitsstand von der Marke $M1$ zur Marke $M2$ abgesunken ist. Insgesamt führen wir diesen Versuchsteil dreimal durch und ermitteln anschließend aus dem Mittelwert für Δt und der angegebenen Apparatekonstanten K die kinematische Viskosität ν . Dabei haben wir folgende Ergebnisse erhalten:

Messung	Δt / s
1	189,16
2	187,30
3	188,04
Durchschnitt	188,17

Tab. 17: Messwerte für Δt bei Versuch 3.3.

$$K = 0,009789 \frac{\text{mm}^2}{\text{s}^2} \quad T = 19^\circ \text{C} \pm 1^\circ \text{C} \quad t_K = 0,1 \text{ s}$$

Nun können wir die kinematische Viskosität bestimmen:

$$\nu = K \cdot (\Delta t - t_K) = 0,009789 \frac{\text{mm}^2}{\text{s}^2} \cdot (188,17 \text{ s} - 0,1 \text{ s}) = 1,841 \frac{\text{mm}^2}{\text{s}}$$

Wir vergleichen nun unseren Messwert mit dem Literaturwert. Da in der Literatur meist die dynamische Viskosität η angegeben wird, müssen wir diese wie folgt in die kinematische Viskosität ν umwandeln:

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}$$

Die Dichte von Ethanol beträgt bei 25° C 0,7894 g/cm³. Als dynamische Viskosität η gilt laut [3] bei 25° C $\eta = 1,074$ mPa s. Dann gilt für die kinematische Viskosität ν :

$$\nu = \frac{1,077 \text{ mPa s}}{0,7894 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}} = 1,361 \frac{\text{mm}^2}{\text{s}}$$

Damit weicht unser Messwert relativ stark vom Literaturwert ab. Dies ist vor allem durch die um 6° C geringere Temperatur bei der Versuchsdurchführung gegenüber der Normtemperatur von 25° C zu erklären.

4. Anhang

4.1. Literatur

- [1] Skript zum Anfängerpraktikum Physik I, CvO Universität Oldenburg, Institut für Physik, Oktober 2005
- [2] dtv-Atlas Physik, Band 1, Deutscher Taschenbuch Verlag, 7. Auflage, August 2004
- [3] David R. Lide, ed., CRC Handbook of Chemistry and Physics, Internet Version 2005, <<http://www.hbcpnetbase.com>>, CRC Press, Boca Raton, FL, 2005
- [4] <http://de.wikipedia.org/wiki/Viskosität>

4.2. Abbildungsnachweis

- **Abb. 1:**
<http://www.physik.uni-oldenburg.de/Docs/praktika/APR/pdf/Viskositaet.pdf>
- **Abb. 2:**
<http://www.physik.uni-oldenburg.de/Docs/praktika/APR/pdf/Viskositaet.pdf>
- **Abb. 3:**
<http://www.physik.uni-oldenburg.de/Docs/praktika/APR/pdf/Viskositaet.pdf>
- **Abb. 4:**
<http://www.physik.uni-oldenburg.de/Docs/praktika/APR/pdf/Viskositaet.pdf>
- **Abb. 5:**
<http://www.physik.uni-oldenburg.de/Docs/praktika/APR/pdf/Viskositaet.pdf>
- **Abb. 6:**
<http://www.physik.uni-oldenburg.de/Docs/praktika/APR/pdf/Viskositaet.pdf>