PROTOKOLL ZUM ANFÄNGERPRAKTIKUM PHYSIK

Messung von Kapazitäten
Auf- und Entladung von Kondensatoren

Sebastian Finkel
Sebastian Wilken

Versuchsdurchführung:
23. November 2005

0. Inhalt

1. Einleitung

Im folgenden Versuch sollen Messverfahren zur Bestimmung von Kapazitäten von Kondensatoren vorgestellt werden und das Verhalten von Kondensatoren in Wechselstromkreisen näher betrachtet werden.

Dabei werden wir mit Hilfe von Kapazitäten den Eingangswiderstand eines Oszilloskops bestimmen, die Kapazität eines Koaxialkabels ermitteln, die Kapazität eines Plattenkondensators untersuchen, sowie die Dielektrizitätszahl von PVC messtechnisch herleiten.

2. Theoretischer Teil

2.1. Kapazität eines Kondensators

Zwei elektrische Leiter, die sich gegenüberliegen, können einen Kondensator bilden. Dies gilt für alle Arten von elektrischen Leitern: vom einfachen Laborkabel bis zu den allgemein schon bekannten sich gegenüberliegenden Metallplatten des Plattenkondensators. Wichtig ist hier der Abstand sowie die Grundfläche des jeweiligen Kondensators. Dies soll nun anhand eines Beispiels genauer erklärt werden.

Abb. 1 zeigt einen Plattenkondensator des Abstandes *d* und der parallelen Fläche *A*, angeschlossen an einer Spannungsquelle U_b.

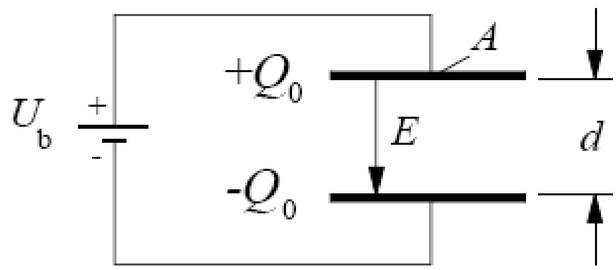

Abb. 1 Schematische Darstellung eines Plattenkondensators

Schaltet man nun die Spannungsquelle U_b ein, so fließt kurzeitig ein Ladestrom: Elektronen werden von der einen Platte abgezogen und auf die andere Platte „geschoben". Durch diese Umverteilung der elektrischen Ladung Q entsteht zwischen den beiden Kondensatorplatte ein elektrisches Feld E. Es gilt:

$$E = \frac{U}{d}$$

U ist der momentane Spannungsabfall über dem Kondensator, der nach einer gewissen Zeit sein Maximum U_b erreicht. Ist diese Spannung erreicht, dann ist die Aufladung beendet und der Kondensator hat seine maximale Ladung erreicht. Die Ladung beträgt dann auf der einen Platte $+Q_0$ und auf der anderen $-Q_0$. U_b und Q_0 sind hierbei proportional und es gilt für die Proportionalitätskonstante C:

$$C = \frac{Q_0}{U_b} \ ; \quad [C] = F = \frac{A \cdot s}{V} = \frac{C}{V}$$

C heißt Kapazität, gemessen in *Coulomb / Volt*. Die Einheit heißt Farad.

Im Vakuum gilt, da hier nur die geometrischen Eigenschaften die Kapazität bestimmen:

$$C \sim \frac{A}{d}$$

Frage 1: Wie lässt sich die Proportionalität $C \sim \frac{1}{d}$ veranschaulichen?

Betrachtet man einen aufgeladenen Plattenkondensators des Abstandes d der auseinander gezogen wird, erkennt man schnell anhand der Formel $E = U/d$, dass die Spannung zunehmen muss, damit die elektrische Feldstärke konstant bleibt. Anhand der Formel für C sehen wir nun, dass bei steigender Spannung und gleich bleibender Ladung die Kapazität sinkt.

Mit der Proportionalitätskonstante ε_0 gilt dann im Vakuum:

$$C = \epsilon_o \cdot \frac{A}{d}$$

ε_0 heißt elektrische Feldkonstante oder Influenzkonstante. Wir legen fest:

$$\epsilon_0 := \frac{1}{\mu_0 c^2} = 8{,}8541 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$$

Die Feldkonstante errechnet sich aus zwei anderen Konstanten, der Lichtgeschwindigkeit c und der magnetischen Feldkonstante μ_0.

2.2. Dielektrikum

Bringt man nun einen anderen Stoff zwischen die beiden Kondensatorplatten, ein so genanntes Dielektrikum, so verändert sich die Kapazität des Kondensators und es gilt nun mit einer weiteren Konstante, die abhängig vom jeweils benutzen Dielektrikumsstoff ist:

$$C = \epsilon_0 \epsilon_r \cdot \frac{A}{d}$$

ε_r nennt man Dielektrizitätskonstante, Permittivitätszahl oder auch relative Dielektrizitätszahl.

Frage 2: Wie lässt sich die Erhöhung der Kapazität durch das Dielektrikum anschaulich erklären?

Führt man ein Dielektrikum zwischen die beiden Platten, so ordnen sich durch das elektrische Feld nun auch die Elektronen innerhalb des Dielektrikums neu an. Und zwar so, dass sich gegenüber der negativ geladenen Platte der Kondensators ein Bereich der positiven Ladung ausbildet und auf der Seite der positiven geladenen Platte ein negativer Bereich. Nun lässt sich logisch nachvollziehen, dass sich diese Ladungen durch ihre Ungleichnamigkeit nun auch gegenseitig beeinflussen. Betrachten wir nun einmal die negativ geladene Seite des Plattenkondensators: Diese wird durch die nun danebenliegende positive Ladung in diesem Bereich wieder stärker positiv als zuvor und somit „passen“ wieder weitere Elektronen auf die Platte. Man könnte auch sagen, dass die positive Ladung mehr Elektronen auf die Platte zieht, damit die relative Stärke des E-Feldes wieder den Wert vor dem Einführen des Dielektrikums hat.

2.3. Auf- und Entladevorgang am Kondensator

Wir betrachten nun zuerst ein so genanntes *RC*-Glied (siehe Abb. 2), um den Auf- und Endladevorgang im zeitlichen Verlauf genauer zu beschreiben.

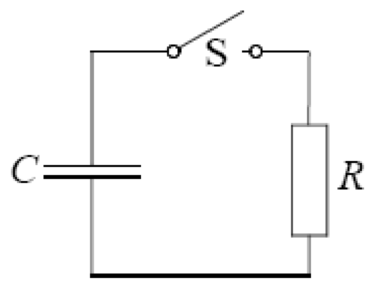

Abb. 2 Schematische Darstellung eines RC-Gliedes

Ein *RC*-Glied besteht aus einem Kondensator der Kapazität *C* und einem ohmschen Widerstand *R*. Sei *Q(t)* die momentane Ladung des Kondensators und *U(t)* die momentane Spannung. Dann wissen wir, dass für die Momentanladung des Kondensators folgendes gilt:

$$Q(t) = C \cdot U(t)$$

Für die Momentanspannung über dem Widerstand *R* gilt:

$$U(t) = R \cdot I(t)$$

Wir wissen, dass Strom als zeitliche Änderung der Ladung ausgedrückt werden kann. Also schreiben wir den Stromfluss zu einem bestimmten Zeitpunkt *t* als Ableitung der Ladung auf und erhalten:

$$I(t) = -\frac{dQ(t)}{dt}$$

Setzen wir die Formeln für Spannung *U* und Stromstärke *I* in die Formel für die Ladung *Q* ein und lösen die Differentialgleichung unter der Anfangsbedingung $Q(t = 0) = Q_0$, erhalten wir:

$$Q(t) = Q_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

RC stellt hierbei eine Zeitkostante dar, da:

$$[RC] = \Omega \cdot F = \frac{V}{A} \cdot \frac{As}{V} = s$$

Man nennt dies die Zeitkonstante $RC = \tau$.

Für die Halbwertszeit *T,* in der die Ladung genau die Hälfte erreicht hat, gilt dann:

$$Q(t=T) = \frac{Q_0}{2} \rightarrow T = \ln 2 \cdot RC \approx 0{,}693\, RC \quad bzw. \quad C = \frac{T}{\ln 2 \cdot R}$$

Für die Spannung ergibt sich nun folgende Gleichung:

$$U(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

Wegen der Proportionalität von Spannung und Ladung lässt sich diese leicht nachvollziehen. Damit lässt sich auch durch das Messen der Spannung, die sich im realen Versuchaufbau wesentlich einfacher bestimmen lässt, die Zeitkonstante bestimmen.

2.4. Reale Spannungsquellen

Analog zur obigen Rechnung lässt sich dies auch für eine reale Spannungsquelle mit einen ähnlichen Ansatz bestimmen.

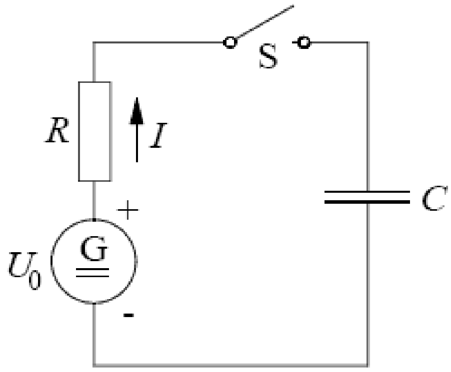

Abb. 3 Schaltungsskizze eines RC-Gliedes an einer realen Spannungsquelle

Es gilt:

$$U_0 = U_R(t) + U_C(t)$$

Mit Hilfe der o.a. Formeln formen wir um zu:

$$Q(t) + RC \cdot \frac{dQ(t)}{dt} - Q_0 = 0$$

Löst man nun noch die Differentialgleichung, so erhält man einen ähnlichen Term wie für das RC-Glied:

$$Q(t) = Q_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \quad \text{bzw.} \quad U(t) = U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

Frage 3: Skizzieren Sie den Verlauf von Gl. (15) und (19) im Zeitintervall [0; 5τ] für die Werte $R = 1\ \mathrm{k\Omega}$, $C = 4{,}7\ \mathrm{nF}$ und $U_0 = 1\mathrm{V}$.

(15) $U(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$:

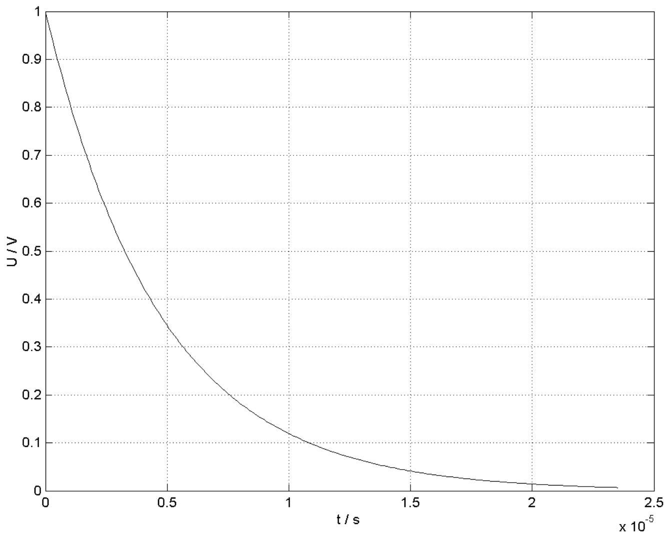

Abb. 4: Verlauf der Spannung gemäß Gleichung 15

(19) $U(t) = U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$:

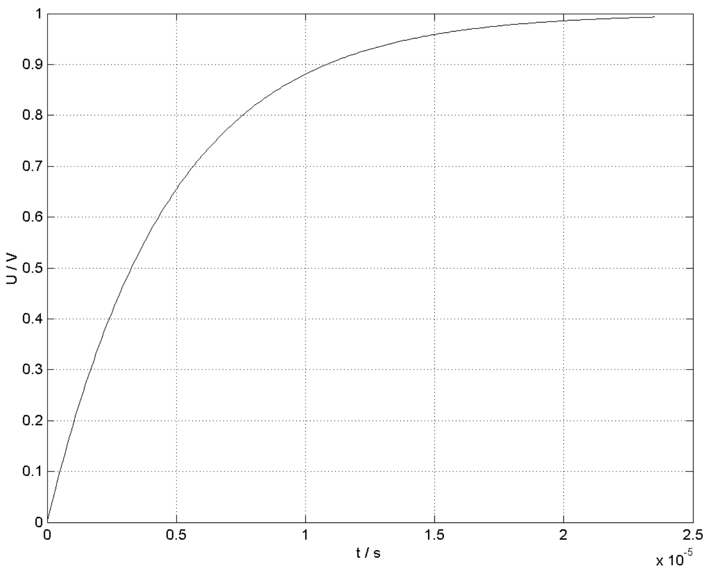

Abb. 5: Verlauf der Spannung gemäß Gleichung 19

2.5. Reihen- und Parallelschaltung von Kondensatoren

Schaltet man nun mehrere Kondensatoren in einer Schaltung zusammen, so addieren sich ihre Kapazitäten. Man muss dabei jedoch zwischen parallel und in Serie geschalteten Kondensatoren unterscheiden.

Für einen Reihenschaltung von Kondensatoren der Anzahl *n* gilt:

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}$$

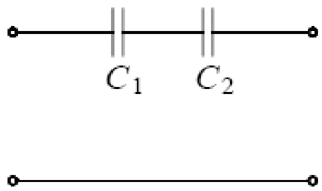

Abb. 6: Reihenschaltung von Kondensatoren

Für eine Parallelschaltung von n Kondensatoren gilt dann entsprechend:

$$C = \sum_{i=1}^{n} C_i$$

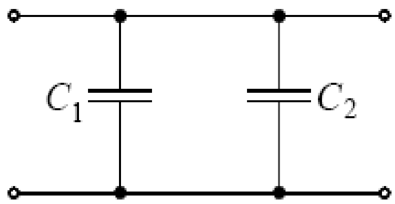

Abb. 7: Parallelschaltung von Kondensatoren

3. Praktischer Teil

3.1. Bestimmung des Eingangswiderstandes eines Oszilloskops

Wir wollen den Eingangswiderstand R_0 des digitalen Oszilloskops Tektronix TDS 210 bestimmen. Dazu bauen wir die Schaltung gemäß Abb. 8 auf und laden den Kondensator C mit einem Netzgerät mit einer Ausgangsspannung von ca. 5 V auf.

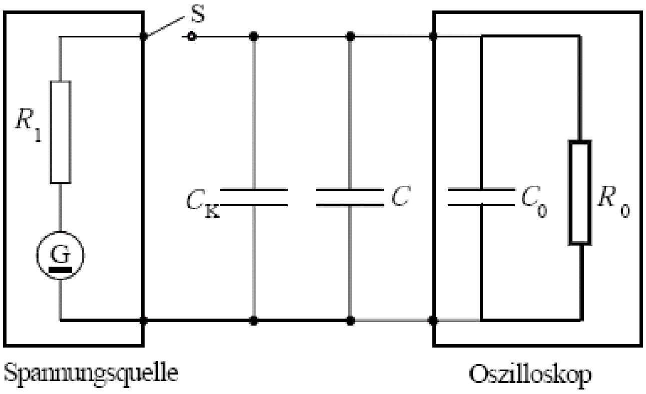

Abb. 8: Ersatzschaltbild zu Versuch 3.1.

Wir wählen dabei $C > C_0 + C_K$ (C = 10,33 µF ± 1 µF), damit wir die Kapazitäten der Verbindungskabel und des Oszilloskops vernachlässigen können. Dann unterbrechen wir die Verbindung zum Kondensator und betrachten auf dem Oszilloskopschirm die Entladung. Wir wiederholen den Versuch nun fünfmal und messen dabei mit einer Stoppuhr die Halbwerteszeit T, in der die auf dem Oszilloskopschirm dargestellte Spannung auf die Hälfte des Anfangswertes zurückgefallen ist. Dabei haben wir folgende Messwerte ermittelt:

Messung	1	2	3	4	5
T / s	7,09	7,06	7,13	7,24	7,13

Tab. 1: Halbwertszeiten der Entladung eines Kondensators über einem Oszilloskop

Nun berechnen wir den Mittelwert für T:

$$\bar{T} = \frac{1}{5} \cdot \sum_{i=1}^{5} T_i = 7{,}13\,s$$

Mithilfe der folgenden Formel können wir nun den Eingangswiderstand des Oszilloskops bestimmen:

$$C = \frac{\bar{T}}{\ln 2 \cdot R_0} \Leftrightarrow R_0 = \frac{\bar{T}}{\ln 2 \cdot C}$$

$$R_0 \;=\; \frac{7{,}13\,s}{ln2 \;\cdot\; 10{,}33\cdot 10^{-6}\,F} \;=\; 995780{,}8\,\Omega \;=\; 0{,}9968\,M\,\Omega$$

Um den Fehler unseres ermittelten Wertes für R_0 zu bestimmen, führen wir eine Größtfehlerberechnung der Fehlerfortpflanzung durch. Der Größtfehler für C ist auf dem Kondensator mit $\Delta C = \pm\, 1\ \mu F$ angegeben. Für die Standardabweichung des Mittelwertes der Halbwertszeit berechnen wir: $\sigma_{\bar{T}} = \pm\, 0{,}06099s$. Nun können wir den Größtfehler ΔR_0 bestimmen:

$$\Delta R_0 \;=\; \left|\frac{\partial R_0}{\partial C}\right|_M \Delta C + \left|\frac{\partial R_0}{\partial \bar{T}}\right|_M \sigma_{\bar{T}} \;\Leftrightarrow\; \Delta R_0 \;=\; -\frac{\bar{T}}{C^2 \cdot \ln 2}\Delta C + \frac{1}{C \cdot \ln 2}\sigma_{\bar{T}}$$

$$\Delta R_0 \;=\; -\frac{7{,}13\,s}{(10{,}33\cdot 10^{-6}\,F)^2 \cdot \ln 2} 1\cdot 10^{-6}\,F + \frac{1}{10{,}33\cdot 10^{-6}\,F \cdot \ln 2} 0{,}06099\,s$$

$$=\; 8518{,}9\,\Omega \;=\; 0{,}0085\,M\,\Omega$$

Als Endergebnis des Versuchs können wir nun festhalten:

$$R_0 \;=\; 0{,}9968\,M\,\Omega \;\pm\; 0{,}0085\,M\,\Omega$$

3.2. Bestimmung der Kapazität eines Koaxialkabels

Wir wollen nun nach einem ähnlichen Verfahren wie bei 3.1. die Kapazität von Koaxialkabeln verschiedener Längen messen, um eine Aussage über Koaxialkabel-Kapazität pro Meter machen zu können. Da die Zeitkonstante $\tau = RC$ in diesem Fall sehr klein ist, verwenden wir eine periodische Spannung, die den „Kondensator“ (= das zu messende Kabel) periodisch auf- und entlädt. Es bietet sich an, einen Funktionsgenerator zu benutzen, der eine Rechteckspannung liefert. Ein Ersatzschaltbild für den Versuch zeigt Abb. 9.

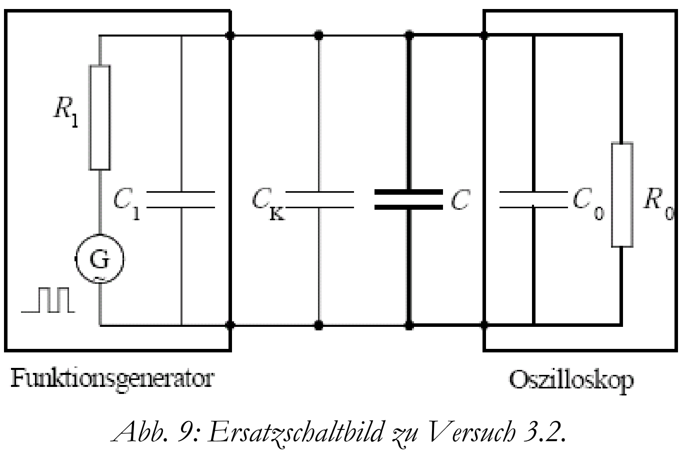

Abb. 9: Ersatzschaltbild zu Versuch 3.2.

Bevor wir mit den eigentlichen Messungen beginnen, müssen wir den Innenwiderstand R_I des Funktionsgenerators bestimmen. Dazu wenden wir die in Versuch 3.3. im Protokoll „Messung ohmscher Widerstände und Innenwiderstände von Spannungsquellen“ beschriebene Methode an. Auf diese Weise konnten wir für den Innenwiderstand des Funktionsgenerators Toellner 7401 ermitteln: $R_I = 50\ \Omega \pm 1\ \Omega$. Wir schalten nun zur Schaltung aus Abb. 9 einen Widerstand R_D so in Reihe, dass gilt: $R_G = R_I + R_D = 1\ k\Omega$. In unserem Fall wählen wir $R_D = 950\ \Omega$. Diesen Wert stellen wir mit Hilfe einer Widerstandsdekade ein. Dadurch können wir die Halbwertszeit T so vergrößern, dass sie für uns messbar wird.

Nun können wir mit unserer Messreihe beginnen. Wir wählen zu Beginn $C = 0$ (also ohne zusätzliches Kabel) und bestimmen die Halbwertszeit T mit dem Oszilloskop. Dann bestimmen wir mit folgender Formel die Gesamtkapazität:

$$T = \ln 2 \cdot R_G \cdot (C_0 + C_1 + C_K + C) \Leftrightarrow (C_0 + C_1 + C_K + C) = \frac{T}{ln2 \cdot R_G}$$

Bei $C = 0$ haben wir gemessen: $T = 80ns$. Wir setzen nun alle bekannten Werte in die o.a. Gleichung ein:

$$\text{Für } C = 0: \ (C_0 + C_1 + C_K) = \frac{80 \cdot 10^{-9}\,s}{ln2 \cdot 1000\,\Omega} = 1{,}15416 \cdot 10^{-10}\,F = 115{,}42\,pF$$

Nun schalten wir zusätzlich fünf Koaxialkabel verschiedener Längen parallel zu den bereits vorhandenen Verbindungskabeln zwischen Funktionsgenerator und Oszilloskop. Für jedes Kabel bestimmen wir die Halbwertszeit T und berechnen anschließend mit folgender Formel die Kapazität C:

$$C = \frac{T}{\ln 2 \cdot R_G} - (C_0 + C_1 + C_K)$$

Wir haben nun folgende Werte für T ermittelt und für C errechnet:

Kabellänge / m	**T / ns**	**C / pF**	**C pro Meter / pF**
0,515	128	69,24	134,44
0,770	144	92,23	119,78
0,890	156	109,64	123,19
1,285	184	150,04	116,76
5,000	300	317,39	63,48

Tab. 2: Messergenisse zu Versuch 3.2.

Nun können wir den Mittelwert der Kabelkapazität pro Meter bestimmen; er beträgt 111,53 pF/m. Die Standardabweichung des Mittelwertes beträgt 24,76 pF/m. Wir halten also als Messergebnis fest:

$$Kabelkapazität\ pro\ Meter\ =\ 111{,}53\,\frac{pF}{m}\ \pm\ 24{,}76\,\frac{pF}{m}$$

Damit liegt der Sollwert für ein Koaxialkabel vom Typ RG 58 C/U von 101pF/m im von uns ermittelten Messbereich.

3.3. Bestimmung der Kapazität eines Plattenkondensators und der Dielektrizitätszahl von PVC

Wir wollen nun die Kapazität eines Plattenkondensators und die Dielektrizitätszahl einer PVC-Platte messen. Dazu verwenden wir den selben Aufbau wie bei 3.2. und schalten statt der verschiedenen Koaxialkabel einen Plattenkondensator parallel zu den bereits vorhandenen Verbindungskabeln zwischen Funktionsgenerator und Oszilloskop. Wir bestimmen nun die Plattenfläche A mit einem Maßband und den Plattenabstand d mit einer Fühlerblattlehre. Dabei erhalten wir folgende Ergebnisse:

$$A\ =\ 20\,cm\cdot 19{,}9\,cm = 398\mathrm{cm}^2;\ \ d\ =\ 2{,}4\,mm$$

Wir trennen nun den Plattenkondensator vom Stromkreis und messen die Halbwertszeit T. Diese betrug bei unserer Messung 210 ns. Nun können wir die Kapazität des Plattenkondensators berechnen:

$$C\ =\ \frac{T}{\ln 2\cdot R_G}-(C_0+C_1+C_K)$$

Die Werte für R_G und $(C_0 + C_1 + C_K)$ wurden bereits im Versuchsteil 3.2. ermittelt. Wir können nun die bekannten Werte einsetzen und erhalten:

$$C\ =\ \frac{210\cdot 10^{-9}s}{\ln 2\cdot 1000\,\Omega}-115{,}42\cdot 10^{-12}F\ =\ 187{,}55\cdot 10^{-12}F\ =\ 187{,}55\,pF$$

Wir berechnen nun den theoretischen Wert für den Plattenkondensator und vergleichen ihn mit unserem Messwert. Der theoretische Wert berechnet sich aus der Fläche der Platte A, dem Plattenabstand d, der elektrischen Feldkonstante ε_0 und der Dielektrizitätszahl ε_r für Luft. Es gilt:

$$C = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{A}{d}$$

Für ε_r setzen wir 1,000576 ein, für ε_0 8,8541 · 10^{-12} As/Vm. Nun können wir den theoretischen Wert für die Kapazität *C* berechnen:

$$C = 8{,}8541 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm} \cdot 1{,}000576 \cdot \frac{0{,}0398\, m^2}{0{,}0024\, m} = 146{,}92\, pF$$

Damit weicht unser Messwert um 40,63 pF vom theoretischen Wert ab. Eine mögliche Ursache für diese relativ große Abweichung ist die Korrosion der Kondensatorplatten mit der Zeit. Die Korrosionsschicht wirkt wie ein Dielektrikum um erhöht somit die Kapazität des Kondensators. Daher ist der von uns gemessene Wert für die Kapazität *C* größer als der zu erwartende Wert.

Nun schieben wir eine PVC-Platte der Fläche A_{PVC} = 16 cm 21 cm = 336 cm² zwischen die Kondensatorplatten und messen die Kapazität C_{PVC} nach dem oben beschriebenen Verfahren. Wir messen eine Halbwertszeit T_{PVC} von 290 ns. Damit beträgt die Kapazität mit der PVC-Platte als Dielektrikum:

$$C_{PVC} = \frac{290 \cdot 10^{-9}\, s}{\ln 2 \cdot 1000\, \Omega} - 115{,}42 \cdot 10^{-12} F = 302{,}96 \cdot 10^{-12} F = 302{,}96\, pF$$

Nun können wir die Dielektrizitätszahl der PVC-Platte mit folgender Formel bestimmen:

$$C_{PVC} = C + \epsilon_0 \cdot \frac{A_{PVC}}{d} \cdot (\epsilon_r - 1) \Leftrightarrow \epsilon_r = 1 + \frac{C_{PVC} - C}{\frac{\epsilon_0 \cdot A_{PVC}}{d}}$$

Wir setzen nun die bekannten Messwerte und Konstanten in die Gleichung ein und erhalten für die Dielektrizitätszahl von PVC einen Wert von $\varepsilon_r = 2{,}26$.

4. Anhang

4.1. Quellen

[1] Skript zum Anfängerpraktikum Physik I, CvO Universität Oldenburg, Institut für Physik, Oktober 2005

[2] dtv-Atlas Physik, Band 2, Deutscher Taschenbuch Verlag, 7. Auflage, August 2004

[3] http://de.wikipedia.org/wiki/Kapazit%C3%A4t_%28Elektrotechnik%29

[4] http://de.wikipedia.org/wiki/Kondensator_%28Elektrotechnik%29

4.2. Abbildungsnachweis

- **Abb. 1:** http://apr.physik.uni-oldenburg.de/docs/praktika/apr/pdf/kapazitaeten
- **Abb. 2:** http://apr.physik.uni-oldenburg.de/docs/praktika/apr/pdf/kapazitaeten
- **Abb. 3:** http://apr.physik.uni-oldenburg.de/docs/praktika/apr/pdf/kapazitaeten
- **Abb. 6:** http://apr.physik.uni-oldenburg.de/docs/praktika/apr/pdf/kapazitaeten
- **Abb. 7:** http://apr.physik.uni-oldenburg.de/docs/praktika/apr/pdf/kapazitaeten
- **Abb. 8:** http://apr.physik.uni-oldenburg.de/docs/praktika/apr/pdf/kapazitaeten
- **Abb. 9:** http://apr.physik.uni-oldenburg.de/docs/praktika/apr/pdf/kapazitaeten