PROTOKOLL ZUM ANFÄNGERPRAKTIKUM PHYSIK

Fehler- und Ausgleichsrechnung

Björn Lübken
Sebastian Wilken

Versuchsdurchführung:
09. November 2005

0. Inhalt

1. Einleitung

In der Experimentalphysik ist jede experimentelle Messung mit verschiedenen Fehlern behaftet. Mit Hilfe der Fehlerrechnung versuchen wir eine möglichst gute Wahrscheinlichkeitsaussage über die zu erwartenden Ergebnisse eines Experimentes zu treffen.

Wir unterscheiden grundsätzlich zwischen systematischen und zufälligen Fehlern. Zu den systematischen Fehlern zählen:

- **unvollkommene Messgeräte**, z. B. dejustierte oder leicht fehlerhafte Gerätschaften,
- **Einfluss der Umwelt**, z. B. temperaturabhängige Messgeräte,
- **ungeeignete Messverfahren**, z. B. Versuchsaufbauten, bei denen sich einzelene Messgeräte gegenseitig beeinflussen und somit das Gesamtergebnis verfälschen, sowie
- **Fehler bei der Durchführung von Messungen**, z. B. bei der fehlerhaften Anwendung und Justierung von Messinstrumenten.

Zufällige Fehler tauchen unvorhersehbar auf und verfälschen die Messwerte sowohl in die eine, als auch in die andere Richtung. Typische zufällige Fehler sind z. B. unterschiedliche Reaktionszeiten des Experimentators beim Ablesen von Messgeräten oder natürliche Schwankungen von zu messenden Vorgängen.

Aufgrund dieser verschiedenen Fehler weicht eine Einzelmessung mal mehr, mal weniger stark vom tatsächlichen Wert ab. Somit gilt es durch häufige Wiederholung des Versuchs möglichst aussagekräftige Ergebnisse zu erlangen.

2. Theoretischer Teil

2.1. Die Häufigkeitsverteilung der Messergebnisse

Um möglichst genaue Messergebnisse zu erzielen, müssen wir so viele Einzelmessungen wie möglich durchführen. Die einzelnen Messergebnisse tragen wir in ein so genanntes Histogramm ein. Dazu teilen wir die Messwerte in verschiedene gleichmäßige Klassen im Bereich zwischen dem minimalen und dem maximalen Messwert ein. Jeden einzelnen Messwert ordnen wir einer bestimmten Klasse zu. Im Beispiel von Frage 1 steht die Messwerthäufigkeit pro Δt mit der Zahl der Messwerte in einer Klasse $m(t_i)$ in folgendem Verhältnis:

$m_i = n_i \cdot \Delta t$ - Für die Einheit ergibt sich s^{-1} (vgl. Frage 1).

Wir nehmen an, dass das Maximum des Histogramms dem tatsächlichen Wert der Messung am nähesten kommt. Bei einer zweckmäßigen Anzahl an Einzelmessungen erhalten wir als Einhüllende unseres Histogramms eine Gaußsche Glockenkurve oder kurz Gaußkurve. Man sagt, die Messergebnisse seinen gaußverteilt oder normalverteilt. Je mehr Versuche durchgeführt werden und je mehr Balken wir in unser Histogramm eintragen, umso genauer lässt sich die Verteilung der Messergebnisse durch die Gaußkurve beschreiben. Der Flächeninhalt der Fläche unter der Gaußkurve entspricht der Gesamtzahl der Messergebnisse. Üblicherweise wird diese aber auf 1 normiert (vgl. Frage 1).

Die Gaußfunktion lässt sich wie folgt beschreiben:

$$n(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} \qquad \text{mit} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} n(x)\,dx = 1 \quad \text{(vgl. Frage 1)}$$

Die Variablen $\bar{x}$ und σ bezeichnen den Mittelwert und die Standardabweichung der Gaußkurve. Der Mittelwert stellt das wahrscheinlichste Ergebnis einer Messung dar und ist das Maximum der Gaußkurve. Die Standardabweichung ist ein Maß für die Streuung der Messwerte um den Mittelwert.

Eine typische Gaußkurve bei zwei verschiedenen Standardabweichungen sieht beispielsweise wie folgt aus (vgl. Frage 2):

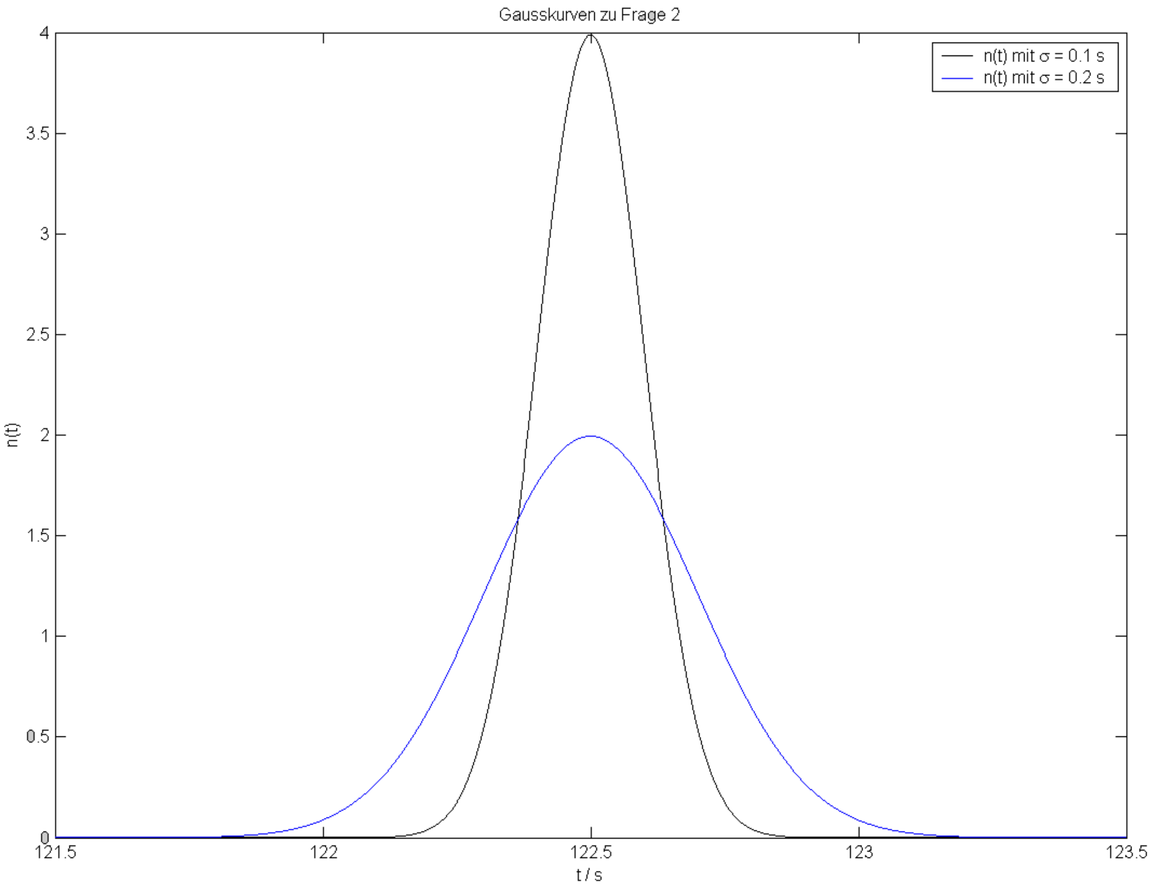

Abb. 1: Gaußkurven gemäß Frage 2

Nun können wir durch Integration berechnen, wieviele Messwerte in einem bestimmten Intervall liegen. Für den 1σ-Vertrauensbereich ergibt sich:

$$\int_{\bar{x}-\sigma}^{\bar{x}+\sigma} n(x)\,dx \approx 0{,}683\,;\ \textit{entspricht}\ 0{,}683\,N\ \textit{oder}\ 68{,}3\ \textit{Prozent aller Messwerte}$$

Man sagt: 68,3% aller Messwerte liegen im 1σ-Vertrauensbereich. Für den 2σ-Vertrauensbereich erhalten wir einen Wert von ca. 95,5% und für den 3σ-Vertrauensbereich rund 99,7%.

2.2. Ermittlung von Mittelwert und Standardabweichung der Einzel messung und Standardabweichung des Mittelwertes

In der Praxis verfügen wir nur über eine endliche Anzahl an Messungen, aus denen wir nun unsere Bestwerte für $\bar{x}$ und σ berechnen. Den Mittelwert der Einzelmessungen erhalten wir, indem wir die Ergebnisse aller Messungen aufsummieren und durch die Anzahl der Messungen (N) dividieren:

$$\bar{x}=\frac{1}{N}\cdot\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Zur Berechnung des Bestwertes für die Standardabweichung benutzen wir folgende Formel:

$$\sigma=\sqrt{\left(\frac{1}{N-1}\cdot\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2\right)}$$

Da wir in der Praxis eine Messung nicht beliebig oft wiederholen können, benötigen wir ein Maß für die Standardabweichung des Mittelwertes $\sigma_{\bar{x}}$. Dafür benutzen wir die Formel:

$$\sigma_{\bar{x}}^2=\frac{1}{N}\cdot\sigma^2 \Leftrightarrow \sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma}{\sqrt{N}}=\sqrt{\left(\frac{1}{N(N-1)}\cdot\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2\right)}$$

Mit Hilfe dieser Formel können wir nun eine Wahrscheinlichkeitsaussage über weitere Messreihen treffen: Der Mittelwert einer weiteren Messreihe wird mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 68% im Bereich $\bar{x}\pm\sigma_{\bar{x}}$ liegen. Da die Standardabweichung des Mittelwertes gleich der Standardabweichung der Einzelmessungen dividiert durch die Wurzel aus N ist, können wir diese durch eine große Anzahl an Messungen beliebig verkleinern.

2.3. Größtfehler

Bei einigen Versuchen in der Experimentalphysik kann nur eine einzige Messung durchgeführt werden. Statt einer Standardabweichung geben wir einen Größtfehler Δa an, welcher den größtmöglichen Fehler bei einer Einzelmessung angibt. Dieser muss in der Regel abgeschätzt werden. Bei einer Waage, die in 0,1g-Schritten wiegt, beträgt der Größtfehler beispielsweise $\pm 0{,}1\,g$.

2.4. Fehlerfortpflanzung

Wenn ein Messergebnis von mehreren Einzelgrößen abhängt, muss der Gesamtfehler aus den Fehlern der einzelnen Werte berechnet werden. Diese werden nicht einfach aufsummiert, sondern nach dem Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz berechnet. Angenommen, unsere gesuchte Messgröße y hängt von den Einzelgrößen a, b, c, ... ab. Unsere Einzelgrößen a, b, c, ... seinen gaußverteilt und haben Bestwerte und Standardabweichungen der Bestwerte. Dann gilt für die Standardabweichung σ_{yB} vom Bestwert y_B das gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz:

$$\sigma_{yB}=\sqrt{\left[\left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)_M \sigma_{\bar{a}}\right]^2+\left[\left(\frac{\partial y}{\partial b}\right)_M \sigma_{\bar{b}}\right]^2+\left[\left(\frac{\partial y}{\partial c}\right)_M \sigma_{\bar{c}}\right]^2+\ldots}$$

Die Ausdrücke $\partial y/\partial a$, $\partial y/\partial b$, ... sind partielle Ableitungen von y nach der jeweiligen Variable. Dabei leiten wir jeweils nach einer der Größen a, b, c, ... ab, wobei wir die jeweils anderen Größen als Konstanten betrachten.

2.5. Größtfehler bei der Fehlerfortpflanzung

Wenn für unsere Einzelmessergebnisse a, b, c, ... keine Standardabweichungen vorliegen, sondern nur die jeweiligen Größtfehler Δa, Δb, Δc, ..., oder sich keine Standardabweichungen für a, b, c, ... bestimmen lassen, ist es notwendig, für die Größe y_B den Größtfehler Δy statt der Standardabweichung σ_{yB} anzugeben:

$$\Delta y=\left|\frac{\partial y}{\partial a}\right|_M \Delta a+\left|\frac{\partial y}{\partial b}\right|_M \Delta b+\left|\frac{\partial y}{\partial c}\right|_M \Delta c\ldots$$

2.6. Ausgleichsgeraden

Es kommt in der Praxis häufig vor, dass zwei Größen x und y linear voneinander abhängen und somit der Gleichung y = ax +b genügen. In einer Messung sollen dann meist die Größen a und b ermittelt werden. Trägt man nun die ermittelten Werte in ein Koordinatensystem ein, nehmen wir an, dass das Schaubild einer Gerade entspricht. Meist ist es jedoch so, dass es mehrere mögliche Geraden gibt, die durch die einzelnen Punkte gelegt werden können, da die Messwerte in der Praxis mit Fehlern behaftet sind und somit mal mehr oder mal weniger von einer bestimmten Ausgleichgerade abweichen. Um die bestmögliche Ausgleichgerade zu ermitteln, muss die folgende Summe möglichst kleingehalten werden:

$$\sum_{i=1}^{N} \left[y_i - (A x_i + B) \right]^2$$

A und B stehen für die Bestwerte der Parameter a und b. Der Parameter y_i steht für die einzelnen Messwerte. Wenn man von jedem einzelnen Messwert eine mögliche Ausgleichgerade der Form ax + b subtrahiert und das Ergbnis durch Quadrieren positiviert und alles zusammen aufsummiert, erhält man je nach gewählter Ausgleichgerade verschiedene Summen. Diejenige Ausgleichgerade mit der geringsten Summe ist die beste (vgl. Frage 3).

2.7. Linearisierung

Bei Messungen ist es generell sinnvoll lineare Zusammenhänge zu erhalten. Wenn man jedoch Messergebnisse der Form $y = bx^a$ vorliegen hat, ist es sinnvoll, diese durch Logarithmieren zu linearisieren. Dadurch wird aus $y = bx^a$ eine Gleichung der Form log y = log b + a log x. Bei einer Formel $y = be^{ax}$ verwenden wir den natürlichen Logarithmus, also ln y = ln b + ax ln e = ln b + ax. Trägt man nun die linearisieren Funktionen auf logarithmischem Papier auf, erhält man typische Ausgleichsgeraden, wie man sie von linearen Zusammenhängen her kennt.

Bei der Logarithmierung ist zu beachten, dass zuvor die Gleichungen durch Division mit den jeweiligen Einheiten dimensionslos gemacht werden müssen, da der Logarithmus einer Einheit nicht definiert ist. Beispiel:

Aus dem Widerstand R wird: $r = \frac{R}{R_0} \; mit \; R_O = 1\,\Omega$

3. Praktischer Teil

Um ein konkretes Beispiel für eine gaußverteilte Messung zu erhalten, wollen wir mit Hilfe eines Fadenpendels die Erdbeschleunigung messen.

3.1. Versuchsaufbau

Wir hängen eine schwere und möglichst kleine Kugel an einem möglichst dünnen Faden auf. Um eine stabile Schwingung zu erreichen, benutzen wir zwei Fäden, die V-förmig mit einem Abstand von 67,5 cm $\pm 0{,}5\,cm$ an der Decke befestigt werden. Die Länge der Fäden beträgt je 255 cm $\pm 0{,}5\,cm$. Um die Länge des imaginären senkrechten Fadens zu ermitteln, wenden wir den Satz des Pythagoras an:

$$l=\sqrt{(255\,cm)^2-(33{,}75\,cm)^2}\approx 252{,}8\,cm\,;\,l=Fadenlänge$$

3.2. Versuchsdurchführung

Wir versetzen das Pendel in eine Schwingung. Dabei sollte die maximale Auslenkung kleiner als 10° sein. Wir messen mit einer Stoppuhr die Zeit, die das Pendel für je zehn Schwingungen benötigt. Wir wiederholen den Messvorgang möglichst oft. Für die Auswertung der Messung dividieren wir unsere Ergebnisse durch zehn, um die Zeit für eine Periode zu ermitteln.

3.3. Auswertung

Die gemessenen Werte sind in Anlage 1 zu finden.

Für die Berechnung der Erbeschleunigung gilt folgende Formel:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\Leftrightarrow g=\frac{4\pi^2 l}{T^2}\,;\,g=Erdbeschleunigung\,,\,T=Schwingdauer\,des\,Pendels$$

Zur Auswertung unserer Messwerte benutzen wir die Software Origin. Wir geben die Daten in ein neue Tabelle ein und lassen ein Histogramm zeichnen. In diesem sehen wir, dass einige Werte sehr weit von den üblichen Werten entfernt liegen. Diese sind wahrscheinlich durch eine fehlerhafte Messung (z. B. wenn nur neun statt zehn Schwingungen ermittelt wurden) entstanden. Daher löschen wir diese aus der Tabelle und aktualisieren das Histogramm:

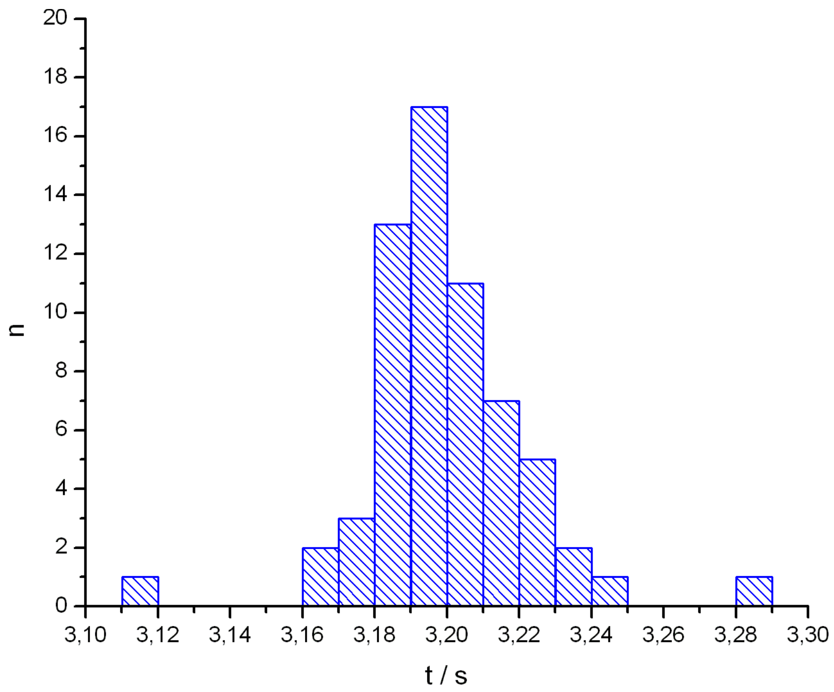

Abb. 2: Histogramm der Messwerte für T

Nun lassen wir den Mittelwert und die Standardabweichung von Origin berechnen. Anschließend legen wir eine Gaußkurve über unser Histogramm und lassen uns Mittelwert und Standardabweichung der Ausgleichskurve anzeigen. Dabei kamen wir zu folgenden Ergebnissen:

Rechnerische Lösung	Graphische Lösung
$\bar{T}$ = 3,19989 s $\sigma_{\bar{T}}$ = 0,02081 s	$\bar{T}$ = 3,1975 s $\sigma_{\bar{T}}$ = 0,02841 s

Wir können nun sagen, dass bei einer Wiederholung der Messung der ermittelte Wert für T mit einer Wahrscheinlichkeit von 68,3% im Bereich $\bar{T}\pm\sigma$ liegt. Wir nehmen an, dass die Werte der graphischen Lösung die verlässlichsten sind. Als Versuchsergebnis halten wir also fest: $T=3{,}1975\,s\pm0{,}02841\,s$.

Nun können wir anhand dieser Werte den Bestwert für die Erdbeschleunigung g_B ermitteln:

$$g_B=\frac{4\pi^2 l}{\bar{T}^2}=\frac{4\pi^2\cdot 2{,}528\,m}{(3{,}1975\,s)^2}\approx 9{,}76\frac{m}{s^2}$$

Um den Fehler für g zu bestimmen, müssen wir eine Größtfehlerberechnung durchführen, da die Fadenlänge l nicht durch eine Messreihe ermittelt wurde, sondern bei allen Messungen konstant war und mit dem selben Fehler behaftet. Für die Berechnung des Größtfehlers Δg benutzen wir folgende Formel:

$$\Delta g = \left|\frac{\partial g}{\partial l}\right|_M \Delta l + \left|\frac{\partial g}{\partial T}\right|_M \sigma_{\bar{T}} \Leftrightarrow \Delta g = \frac{4\pi^2}{\bar{T}^2}\Delta l + \frac{8\pi^2 l}{\bar{T}^3}\sigma_{\bar{T}}$$

Nun können wir die bekannten Werte einsetzen und erhalten:

$$\Delta g = \frac{4\pi^2}{(3{,}1975\,s)^2}\cdot 0{,}01\,m + \frac{8\pi^2 \cdot 2{,}528\,m}{(3{,}1975\,s)^3}\cdot 0{,}02841\,s \approx 0{,}21\,\frac{m}{s^2}$$

Als Endergebnis der Messung können wir jetzt formulieren:

$$g = 9{,}76\,\frac{m}{s^2} \pm 0{,}21\,\frac{m}{s^2}$$

Damit liegt der Literaturwert von g = 9,81 m*s^{-2} innerhalb des von uns ermittelten 1σ-Vertraunesbereiches.

4. Anhang

4.1. Quellen

[1] Skript zum Anfängerpraktikum Physik I, CvO Universität Oldenburg, Institut für Physik, Oktober 2005

[2] dtv-Atlas Physik, Band 1, Deutscher Taschenbuch Verlag, 7. Auflage, August 2004

[3] http://de.wikipedia.org/wiki/Fehlerrechnung